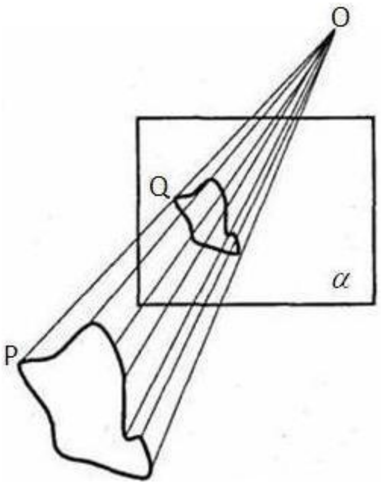
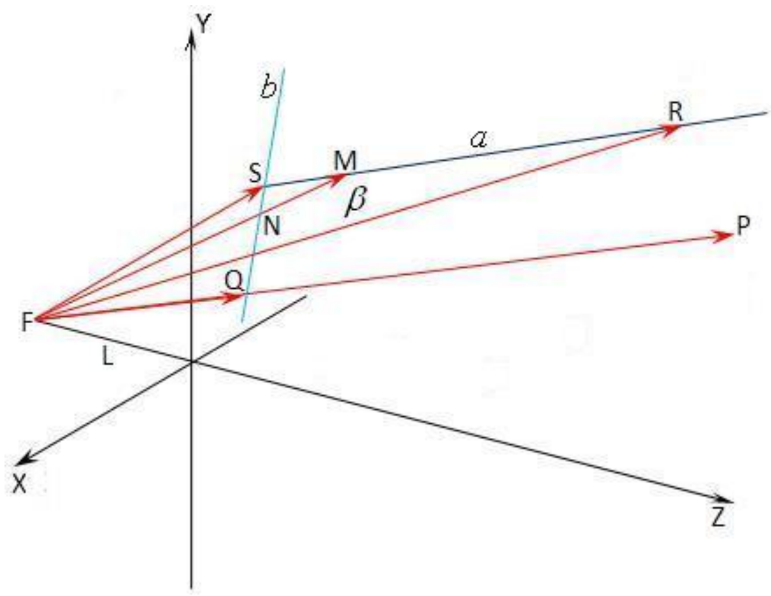
Определение 1. Пусть дана точка O и плоскость α, которая не содержит точку O. Тогда для любой точки P ее проекцией из центра O на плоскость α называется точка $Q = PO \cap \propto$. Проекцией любой фигуры Φ называется фигура $\Psi \subset\propto$, составленная из тех и только тех точек, которые являются проекциями всевозможных точек $P \in \Phi$ из центра O на α.



Прежде, чем дать точную формулировку закона ренессансной перспективы, рассмотрим проекцию пучка параллельных прямых из центра на плоскость. Докажем, что получится пучок прямых, пересекающихся в одной точке.

Предложение 1. Пусть дана плоскость α точка F, не лежащая в этой плоскости. Пусть также дано несколько прямых, которые параллельны между собой. Этот набор прямых мы назовем пучком. Проведем через точку F прямую, которая параллельна всем прямым пучка, и пусть она пересекает α в единственной точке Q. Тогда проекция каждой прямой пучка из центра F на плоскость α проходит через Q или совпадает с этой точкой.

Доказательство. На плоскости α введена система координат XY, но в доказательстве она не используется. Выберем какую-нибудь прямую a из данного пучка, отличную от FQ. Прямая a не параллельна плоскости α. Иначе прямая PQ, которая по построению параллельна a, была бы параллельна α. Поскольку a не параллельна плоскости α и не лежит в ней, то эта прямая пересекает α в единственной точке, которую мы обозначим S. Возьмем на прямой a любую точку R, отличную от S. Существует единственная плоскость β, проходящая через точки R, S и $Q \notin a$. Тогда плоскости α и β, которые не параллельны ($S \in \alpha \cap \beta$) и не совпадают ($R \in \beta$ и $R \notin\propto$), пересекаются по прямой b. Ясно, что эта прямая проходит через точки S и Q.



Поскольку FQ параллельна a, то прямые FQ и a лежат в одной плоскости. Так как эта плоскость содержит прямую a и точку Q, то она совпадает с β. Следовательно $F \in \beta$. Тогда для любой точки $M \in a \subset \beta$ прямая FM лежит в плоскости β ($F \neq M$ т. к. $F \notin a$). Следовательно $FM \cap \propto \in \beta \cap \alpha = b$. Таким образом, прямая FM пересекается с плоскостью $\propto$ в точке N, лежащей на прямой b. Поскольку точка $M \in a$ была выбрана произвольно, вся прямая a проектируется из центра F на прямую b.

При этом прямая b проходит через точку Q. Прямая a была выбрана из пучка произвольно. Поэтому каждая прямая пучка, за исключением FQ, проектируется на такую прямую в плоскости α, которая проходит через точку Q. При этом проекция прямой FQ, очевидно, совпадает с точкой Q.

Предложение 1 доказано.

Предложение 2. Пусть точка F лежит на отрицательной полуоси Z на расстоянии L от начала координат. Тогда для любой точки $M(x, y, z)$ ее проекция N из центра F на плоскость XY имеет координаты X, Y, которые выражаются следующими формулами:

$$X = \frac{Lx}{L+z} \qquad Y = \frac{Ly}{L+z} \qquad (1)$$

Доказательство. Выпишем координаты точек:

$F(x_F, y_F, z_F) = (0,0,-L)$, $M(x_M, y_M, z_M) = (x, y, z)$, $N(x_N, y_N, z_N) = (X, Y, 0)$

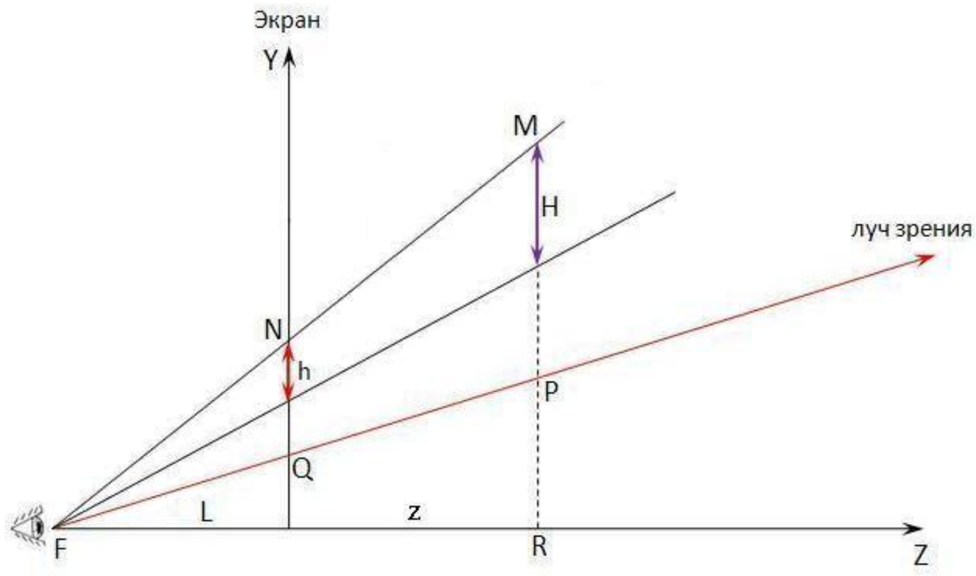
Из сонаправленности векторов $\overrightarrow{FM} = (x_M - x_F, y_M - y_F, z_M - z_F)$ и

$\overrightarrow{FN} = (x_N - x_F, y_N - y_F, z_N - z_F)$ следует, что

$$\frac{x_M - x_F}{x_N - x_F} = \frac{y_M - y_F}{y_N - y_F} = \frac{z_M - z_F}{z_N - z_F} = \frac{FM}{FN} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z+L}{L} \ ,$$

откуда получаются формулы (1). *Предложение 2 доказано.*

Предложение 3 (Закон прямой линейной перспективы). Пусть выбраны экран изображения и неподвижная точка F, соответствующая положению глаза наблюдателя. Тогда любой пучок параллельных прямых линий, являющихся краями реальных объектов и не параллельных экрану, изображается на нем пучком лучей, имеющих общую вершину. Эту вершину, называемую точкой схода, дает пересечение с плоскостью экрана луча зрения, который исходит из F параллельно линиям пучка. Пусть любой отрезок – ребро реального объекта смещается в любом направлении, так что в начальном и конечном положении отрезок параллелен экрану, и его длина не меняется. Тогда размер изображения отрезка обратно пропорционален его удаленности от плоскости, которая параллельна экрану и проходит через точку F.



Доказательство. Расстояние от отрезка до указанной плоскости $FR = L + z$. На чертеже точка R лежит в плоскости YZ, но в общем случае это не так. Все что касается изображения параллельных линий, прямо следует из предложения 1. Теперь предположим, что отрезок с координатами концов (x_1, y_1, z) и (x_2, y_2, z) параллельно переносится на вектор $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Тогда новые координаты его концов будут такими:

$$(x_1 + v_x, y_1 + v_y, z + v_z) \ \text{ и } \ (x_2 + v_x, y_2 + v_y, z + v_z).$$

По формулам (1), длины проекций в конечном и начальном положениях:

$$l_2 = \sqrt{\left(\frac{L(x_1+v_x)}{L+z+v_z} - \frac{L(x_2+v_x}{L+z+v_z}\right)^2 + \left(\frac{L(y_1+v_y}{L+z+v_z} - \frac{L(y_2+v_y)}{L+z+v_z}\right)^2} =$$
$$= \frac{L}{L+z+v_z}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$
$$l_1 = \sqrt{\left(\frac{Lx_1}{L+z} - \frac{Lx_2}{L+z}\right)^2 + \left(\frac{Ly_1}{L+z} - \frac{Ly_2}{L+z}\right)^2} = \frac{L}{L+z}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\ .$$

Отсюда следует, что

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{L+z}{L+z+v_z} \qquad (2)$$

где $L+z$ и $L+z+v_z$ - расстояния от начального и конечного положения отрезка до плоскости, которая параллельна экрану и проходит через центр перспективы F. *Предложение 3 доказано.*

Если размер l и расстояние от центра перспективы до экрана малы по сравнению с расстоянием до предмета $(L, l \ll z, r)$, то можно считать, что

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \qquad (3)$$

где z – координата любой точки отрезка, r - расстояние от нее до центра перспективы. В таком упрощенном виде правило масштабирования изображений удобно применять. Но следует заметить, что если отрезок не параллелен плоскости экрана, то изменение его видимых размеров не подчиняется закону обратной пропорциональности (2) (и (3) при $L, l \ll z$). Художники изображают размеры на глазок, соотнося между собой реальные размеры предметов. Наиболее точная рекомендация состоит в применении формул (1). Она мало полезна для художников, которые обычно не сковывают себя требованиями перспективного единства. Для компьютерной графики формулы (1) вполне подходят.