СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И РАСЧЕТ СООРУЖЕНИЙ

STRUCTURAL MECHANICS AND ANALYSIS OF CONSTRUCTIONS

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ / SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Издается с 1 января 1959 г.
Выходит один раз в два месяца

Since the 1st January 1959
Published once in two months

3 (272) 2017

Учредитель: АО «НИЦ «Строительство»

JSC «NITS «STROITELSTVO»

Москва. ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко

Moscow. TSNIISK named after V.A. Kucherenko

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор
ВЕДЯКОВ И.И. проф., д.т.н.

Chief Editor
VEDYAKOV I.I.
Doctor of Technical Sciences, Prof.

АЙЗЕНБЕРГ Я.М. проф., д.т.н.
АНДРЕЕВ В.И. чл.корр. РААСН, проф., д.т.н.
БОНДАРЕНКО В.М. акад. РААСН, проф., д.т.н.
ГОРОДЕЦКИЙ А.С. акад. РААСН, проф., д.т.н.
ЕРЕМЕЕВ П.Г. проф., д.т.н.
ИГНАТЬЕВ В.А. акад. РААСН, д.т.н.
ИЛЬИЧЕВ В.А. акад. РААСН, проф., д.т.н.
КАРПЕНКО Н.И. акад. РААСН, проф., д.т.н.
КОЛЧУНОВ В.И. акад. РААСН, проф., д.т.н.
КОСИЦЫН С.Б. проф., д.т.н.
КУРБАЦКИЙ Е.Н. проф., д.т.н.
ЛЯХОВИЧ Л.С. акад. РААСН, проф., д.т.н.
МОНДРУС В.Л. проф., д.т.н.
НАЗАРОВ Ю.П. д.т.н.
НЕМЧИНОВ Ю.И. проф., д.т.н.
ОБОЗОВ В.И. проф., д.т.н.
ОДЕССКИЙ П.Д. проф., д.т.н.
ПЯТИКРЕСТОВСКИЙ К.П. (отв. секретарь) д.т.н., с.н.с
РАЙЗЕР В.Д. проф., д.т.н.
РАСТОРГУЕВ Б.С. проф., д.т.н.
ТРАВУШ В.И. акад. РААСН, проф., д.т.н.
ФЕДОРОВ В.С. акад. РААСН, проф., д.т.н.
ЧИРКОВ В.П. проф., д.т.н.
Томас БОК иностранный чл. РААСН, проф., д.т.н.

Редактор выпуска *Пятикрестовский К.П.*
Корректор *Козлова М.В.*
Компьютерная верстка *Севастьянова М.Г.*

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия. Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС 77-63489 от 10 ноября 2015 г.

Включен в утвержденный ВАК Минобрнауки России Перечень рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (в действующем Перечне — под номером 1698). Индексируется в РИНЦ.

Адрес редакции:

109428, Москва, ул. 2-я Институтская, д. 6, стр. 1
Тел.: 8-499-170-10-81; 8-499-174-79-93
E-mail: stroymex@list.ru, stroymexrs@gmail.com
www.stroy-mex.narod.ru

Подписной индекс в РОСПЕЧАТИ 18317 / 36188
Подписка в научной электронной библиотеке
http://elibrary.ru/title_profile.asp?id=26727

Подписано в печать 24.05.2017. Формат 70×108 1/16
Бумага офсетная. Офсетная печать. Тираж 500 экз.
Заказ №

Отпечатано в
ООО «Первая оперативная типография»
115114, Москва, 2-й Кожевнический пер., д. 12

Перепечатка материалов журнала «Строительная механика и расчет сооружений» допускается только с письменного разрешения редакции. При цитировании ссылка обязательна.

Представленные заказчиками готовые формы рекламных материалов не подвергаются редакторской правке и печатаются в оригинале.

© АО «НИЦ «Строительство», «Строительная механика и расчет сооружений», 2017

УДК 69.04

Д.Б. ЗОТЬЕВ, д-р физ.-мат. наук, проф.
Институт архитектуры и строительства ВолГТТУ, г. Волгоград

К РАСЧЕТУ ПРОГИБОВ КОМПОЗИТНЫХ ОПОР ЛЭП

Статья посвящена расчету прогибов одностоечных, композитных опор ЛЭП. Эти опоры являются сравнительно гибкими, поэтому прогибы от ветровых и весовых нагрузок могут быть сопоставимыми с размерами конструкции. В таких случаях применимость методов строительной механики и сопромата, разработанных для малых перемещений, нуждается в обосновании экспериментами. В статье предлагается метод расчета прогибов опор ЛЭП, связанный с уравнением упругой линии. Из-за наличия вертикальных сил оно не относится к ОДУ. Для решения этого уравнения предлагается алгоритм, легко реализуемый в MathCad, который может применяться к любым одностоечным опорам, а также для расчета продольно-поперечных изгибов любых консолей с защемленным концом, работающих в упругом режиме. Данный метод позволяет найти точную форму осевой линии при прогибах одного порядка с размерами конструкции. САПР, реализующие метод конечных элементов, а также методика ОАО «ФСК ЕЭС» теоретически не обеспечивают ту же точность при достаточно больших прогибах. В статье описан традиционный для энергетики метод расчета прогибов одностоечных опор, адаптированный для распределенных нагрузок без упрощающих предположений. Показано, что в случае композитной опоры ЛЭП он недостаточно точно учитывает вертикальные нагрузки в деформированном состоянии.

Ключевые слова: *композитная опора ЛЭП, ветровая нагрузка, формула Максвелла – Мора, прогиб консоли, уравнение упругой линии.*

§1. Постановка задачи

С начала XXI века опоры ЛЭП, выполненные из стеклопластика (композитные опоры), активно применяются вместо железобетонных и стальных [1—4]. Они отличаются большей гибкостью, вследствие чего точный расчет прогибов актуален. Согласно п. 2.5.139 [5]: «*расчет опор гибкой конструкции производится по деформированной схеме (с учетом дополнительных усилий, возникавших от весовых нагрузок при деформациях опоры, для первой и второй групп предельных состояний*)». Однако, прогибами опор ЛЭП от вертикальных нагрузок порой пренебрегают, считая их пренебрежимо малыми [6]. Последнее во многом верно, но в случае больших прогибов влияние весовых сил может быть существенным. В фундаментальной книге [7] дана методика расчета, отвечающая ПУЭ [5], но разработанная для железобетонных опор.

В энергетике принято рассматривать собственную тяжесть опоры ЛЭП, а также ветровую нагрузку на стойку, как сосредоточенные силы, приложенные на половине высоты [6—8]. Этот метод дает достаточно точные оценки прогибов (см. ниже). При этом искажения эпюр изгибающих моментов и напряжений является несущественными, если опора не работает в опасной близости от пределов прочности и текучести (у стеклопластиков они близки между собой). Тем не менее, в случае, когда опора не является однородным цилиндром или призмой, такой эвристический подход является физически необоснованным. Независимо от этого, точный прогноз искривленной линии и напряжений требует учета распределенного характера нагрузок на стойку.

Композитные опоры ЛЭП достаточно прочны [9], но могут иметь весьма заметные прогибы. В ПТЭЭП [10] допустимые отклонения таких опор не установлены. Согласно п. 7.3.3 [11], они не должны превышать 1/7 высоты при соблюдении изоляционных расстояний. В рассмотренном ниже примере опоры ПК-220-1 прогиб вершины достигает 2,8 м, что лишь на 32% меньше предельного значения. Точный, теоретический прогноз отклонений опор ЛЭП также актуален в связи с задачей их точного измерения [12].

В настоящей статье рассматриваются одностоечные опоры, т.е., консоли с защемленным концом. Описана классическая методика из [7], адаптированная к распределенным нагрузкам на стойку без упрощающих предположений. Предлагается точный метод расчета упругих прогибов опор ЛЭП, который сравнивается с др угими, применяемыми в энергетике.

§2. Расчет прогибов железобетонной, одностоечной опоры

Опишем метод расчета прогибов железобетонных опор, следуя [7] и ссылаясь на формулы из этой книги. Пусть на опору высотой H действует система горизонтальных сил P_i и вертикальных сил N_i, приложенных на уровнях h_i (считая от земли), где $i = 1,\ldots,n$. Точки приложения сил могут

быть смещены горизонтально от оси опоры. Если на некотором уровне приложены несколько сонаправленных сил, то рассматриваемая методика позволяет считать их за одну, равную сумме этих сил и приложенную на оси опоры. При наличии эксцентриситета вертикальных сил на данном уровне следует учитывать соответствующий, изгибающий момент после их замены одной силой (см. п. 4.1). С учетом этого в дальнейшем предполагается, что на каждом уровне h_i приложена только одна пара сил P_i, N_i.

Сначала необходимо для каждого i найти прогиб f_{Pi} на уровне h_i от действия только горизонтальных сил. Используя (6-175) получим:

$$f_{Pi} = \frac{\xi}{3B_1}\sum_{j=1}^{n} P_j h_{ij,\min}^3 \cdot (\nu_{ij}\mu_1 - \mu_2) + \frac{(1-\xi)}{3B_2}\sum_{j=1}^{n} P_j h_{ij,\min}^3 \cdot (\nu_{ij}\eta_1 - \eta_2), \quad (1)$$

где $B_1 = 0{,}85 \cdot E_б J_{пр}$ — условная жесткость опоры при упругой деформации; $E_б$ — начальный модуль упругости бетона при сжатии; $J_{пр}$ — приведенный момент инерции сечения опоры на уровне земли. В силу (6-172) и (6-173) (сечение в форме тонкого кольца) имеем:

$$J_{пр} \approx \frac{\pi}{8}\delta_э D_{ср}^3 = \frac{\pi}{8}\delta \cdot (1 + \mu(n-1)) D_{ср}^3, \quad (2)$$

где δ — толщина стенки и $D_{ср}$ — средний диаметр сечения; μ — доля арматуры в общей площади сечения; $n = E_а / E_б$ и $E_а$ — модуль упругости арматуры.

Жесткость B_2 при пластичной деформации определяется формулой (6-174), но она нам не потребуется. Коэффициент ξ учитывает изгиб опоры до и после появления трещин в бетоне, так что $\xi = M_у / M$, где M — изгибающий момент на уровне земли, создаваемый системой нагрузок на опору, $M_у$ — часть этого момента, до которой опора работает упруго.

В формуле (1) $\nu_{ij} = h_{ij,\max} / h_{ij,\min}$, где $h_{ij,\min} = \min(h_i, h_j)$ и $h_{ij,\max} = \max(h_i, h_j)$, а коэффициенты $\mu_1, \mu_2, \eta_1, \eta_2$ определяются по таблицам 6-17 и 6-18 [7]. Параметр n в этих таблицах равен отношению площадей верхнего и нижнего сечений конической опоры (при $n = 1$ опора цилиндрическая). Аналогично, параметр m выражает изменение площади сечения арматуры по высоте опоры.

Если максимальный из прогибов f_{Pi} превышает $1/50$ высоты опоры [7], то следует учитывать вертикальные нагрузки. Из (6-178) получим полный прогиб f_i в точке i:

$$f_i = \frac{f_{Pi}}{1 - N_{пр}/N_{кр}}, \quad (3)$$

где приведенная, вертикальная сила $N_{пр}$, эквивалентная системе сил N_i, и критическая сила $N_{пр}$ в силу (6-179) и (6-180) определяются по формулам:

$$N_{пр} = \sum_{i=1}^{n} N_i \frac{f_{1,i}}{f_{1,п}} \frac{h_п}{h_i}, \quad N_{кр} = \frac{\pi^2}{12} \frac{h_п}{f_{1,п}}, \quad (4)$$

для произвольной высоты $h_п$, на которой должна находиться точка приложения силы $N_{пр}$.

Например, можно принять $h_п = H$ (так мы и сделаем). Здесь $f_{1,i}$ — прогиб на высоте h_i под действием единичной, горизонтальной силы, приложенной на уровне h_i, а $f_{1,п}$ — прогиб на высоте $h_п$ под действием единичной, горизонтальной силы, приложенной на уровне $h_п$, с учетом поворота опоры в грунте. В силу (6-181) имеет место выражение:

$$f_{1,п} = \xi \cdot f_{1,п1} + (1-\xi) f_{1,п2} + f_{1,г}, \quad (5)$$

где $f_{1,п1}$ и $f_{1,п2}$ — прогибы, вычисляемые по жесткостям B_1 и B_2 соответственно; $f_{1,г}$ — прогиб за счет поворота опоры в грунте, который в силу (6-182) определятся из формулы:

$$f_{1,г} = \frac{\beta \cdot h_п (h_п + 2)}{M_г^н}. \quad (6)$$

Здесь $\beta = 0{,}01$ рад — предельно допустимый

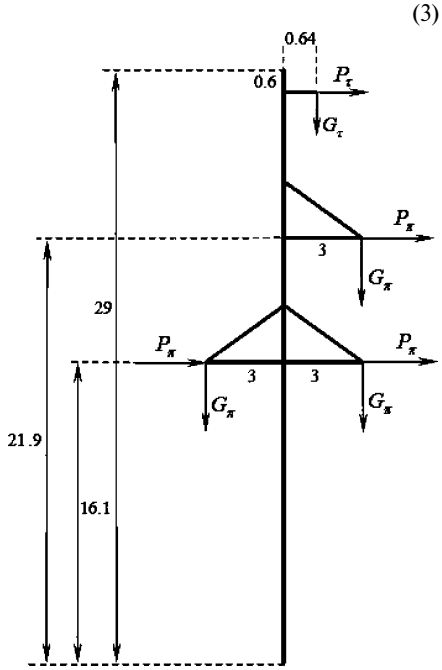

Рис. 1. Схема нагружения опоры ПК-220-1 без нагрузок на стойку, размеры в метрах

угол поворота опоры под действием наибольшего, опрокидывающего момента $M_{\text{г}}^{\text{н}}$ [7]. Если расчет ведется для максимальной нагрузки с учетом ветра и оледенения, то $M_{\text{г}}^{\text{н}} = M$ (изгибающий момент на уровне земли).

§3. Расчет прогибов композитной опоры

Наша цель — применить описанную методику к расчету прогибов композитной опоры, которая подвергается распределенным ветровым и весовым нагрузкам. Предполагаем, что максимальные напряжения при изгибании опоры значительно ниже предела прочности на сжатие/растяжение $\sigma_{\text{п}} \approx 200$ МПа.

Заметим, что формулы (3) и (4) применимы к любой опоре, которая рассчитывается, как консоль с защемленным концом (см. (6-1)—(6-4) [7]). Поскольку композитная опора подвержена упругой деформации, в (5) следует принять $\xi = 1$, что соответствует $M = M_{\text{у}}$. Соответственно, коэффициент B_2 не нужен, а в формуле для B_1 вместо $E_{\text{б}}$ следует брать модуль упругости E стеклопластикового композита, считая момент инерции $J_{\text{пр}}$ по формуле (2) в предположении $n = 1$ или $\mu = 0$ (оба равенства означают отсутствие арматуры и $\delta_{\text{э}} = \delta$). При упругой деформации величина $\tilde{f}_{1,i} = f_{1,i} h_{\text{п}} / h_i$ равна прогибу опоры под действием единичной, горизонтальной нагрузки, приложенной на уровне $h_{\text{п}} = H$. Тогда из (4) следует:

$$N_{\text{пр}} = \sum_{i=1}^{n} N_i \frac{\tilde{f}_{1,i}}{f_{1,\text{п}}}. \tag{7}$$

Формула (1) становится неприменимой, поскольку таблицы 6-17, 6-18 [7] при отсутствии арматуры теряют смысл и не могут быть однозначно интерпретированы (не ясно, какое именно значение присвоить m). Прогибы f_{Pi} необходимо считать иначе. Например, с помощью интеграла Мора (5.23) [13]. Получаем следующий алгоритм.

1. Выбираем шаг дискретизации $\Delta h << H$ высоты h и определяем силы P_i и N_i в точках опоры, которые находятся на уровнях $h_i = \Delta h \cdot i$, где $i = 0,...,n$ и $n\Delta h = H$. Например, можно принять $\Delta h = 0{,}1$ м.

1.1. Постоянному по высоте ветровому давлению $q_{\text{в}}$ Па соответствует система сил $P_{\text{в,i}} = q_{\text{в}} d_i \Delta h$, приложенных на уровнях h_i, где d_i — внешний диаметр сечения на высоте h_i. Для конической и цилиндрической опоры $d_i = d_n h_i / H + d_0 \cdot (H - h_i) / H$.

1.2. Собственному весу опоры $G_{\text{оп}}$ (включая ледовую нагрузку) соответствует система сил $G_{\text{оп},i} = w \pi \cdot d_i \Delta h \cdot \delta$, приложенных на уровнях h_i, где w [Н/м^3] – удельный вес опоры (без учета проводов и грозозащитного троса).

1.3. Добавляя к этим силам ветровые $P_{\text{п}}$, $P_{\text{т}}$ и весовые $G_{\text{п}}, G_{\text{т}}$ нагрузки на провода и грозозащитный трос, приложенные на некоторых уровнях h_j, получим полную систему горизонтальных и вертикальных сил P_i, N_i, действующих на опору.

Например, для опоры ПК-220-1, принимая $\Delta h = 0{,}1$ м, для всех $i \neq 161; 219; 284$ имеем $P_i = P_{\text{в,i}}$ и $N_i = G_{\text{оп,i}}$, при этом $P_{161} = P_{\text{в},161} + 2P_{\text{п}}$, $N_{161} = G_{\text{оп},161} + 2G_{\text{п}}$, $P_{219} = P_{\text{в},219} + P_{\text{п}}$, $N_{219} = G_{\text{оп},219} + G_{\text{п}}$, $P_{284} = P_{\text{в},284} + P_{\text{т}}$, $N_{284} = G_{\text{оп},284} + G_{\text{т}}$ (16,1 и 21,9 м – уровни проводов нижнего и верхнего ярусов, 28.4 м – уровень грозозащитного троса). Здесь $n = 290$ и $H = 29$ м.

2. Вычисляем прогибы f_{Pi} от системы горизонтальных сил при всех $i = 0,...,n$.

2.1. Осевой момент инерции (кольцевого) сечения на уровне h_i находим по формуле $J_i \approx \pi\delta \cdot (d_i - \delta)^3 / 8$ (вытекает из (2) без арматуры).

2.2. Изгибающие моменты M_i в точках i от системы сил P_j вычисляем по формуле:

$$M_i = \sum_{j=i}^{n} P_j \cdot (h_j - h_i).$$

2.3. Изгибающие моменты $\bar{M}_{ij} = \bar{M}_i(h_j)$ в точках j от единичной, горизонтальной силы, приложенной в точке i, определяем так: $\bar{M}_{ij} = h_i - h_j$ при $i \geq j$ и $\bar{M}_{ij} = 0$ при $i < j$.

2.4. Аппроксимируя интеграл Мора (5.23) [13], с достаточной точностью находим:

$$f_{Pi} \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k \bar{M}_{ik}}{EJ_k} \Delta h + \frac{M_0 \bar{M}_{i0}}{EJ_0} \frac{\Delta h}{2}.$$

3. Вычисляем полные прогибы от системы горизонтальных и вертикальных сил.

3.1. Для каждого $i = 0,...,n$ находим прогиб $\tilde{f}_{1,i}$ на уровне h_i под действием единичной, горизонтальной силы, приложенной на уровне H. Используем интеграл Мора:

$$\tilde{f}_{1,i} \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{(H-h_k)\bar{M}_{ik}}{EJ_k}\Delta h + \frac{H\bar{M}_{i0}}{EJ_0}\frac{\Delta h}{2}.$$

3.2. Вычисляем прогиб $f_{1,п}$ на высоте $h_п = H$ под действием единичной, горизонтальной силы на уровне H, с учетом поворота в грунте. Из формулы (5), полагая $\xi = 1$, имеем $f_{1,п} = f_{1,п1} + f_{1,г}$, где $f_{1,п1} = \tilde{f}_{1,n}/0{,}85$, а прогиб $f_{1,г}$ определяется из формулы (6) при $\beta = 0{,}01$ и $h_п = H$. Момент $M_г^н$ равен сумме моментов сил P_i, N_i относительно основания опоры, вычисляемых при максимальной нагрузке с учетом ветра и оледенения.

3.3. По формуле (7) вычисляем приведенную силу $N_{пр}$.

3.4. По второй из формул (4) при $h_п = H$ находим критическую силу $N_{кр}$.

3.5. По формуле (3) получаем прогибы f_i при всех $0 = 1,...,n$.

4. Проверяем обоснованность предположения об упругой деформации опоры.

4.1. Вычисляем изгибающие моменты $\tilde{M}_i$ в точках i с учетом прогибов. Из (6-1) [7]:

$$\tilde{M}_i = \sum_{j=i}^{n} P_j \cdot (h_j - h_i) + M_{e,i} + \frac{\sum_{j=i}^{n} N_j \cdot (f_{Pj} - f_{Pi})}{1 - N_{пр}/N_{кр}}, \tag{8}$$

где $M_{e,i}$ — изгибающий момент в сечении h_i, возникающий от эксцентриситета вертикальных нагрузок. Например, в случае опоры ПК-220-1 (см. п. 1.3) имеем:

$$M_{e,290} = 0,\ M_{e,284} = G_т \cdot 0.64,\ M_{e,219} = G_т \cdot 0.64 + G_п \cdot 3,\ M_{e,0} = M_{e,161} = M_{e,219}.$$

4.2. Определяем максимальные, растягивающие напряжения $\sigma_{max,i}$ в сечениях на отметках высоты h_i. По формуле (5.3) [14] имеем $\sigma_{ьmax,i} = \tilde{M}_i d_i/(2J_i)$.

4.3. Проверяем условие $\sigma_{max,i} < \sigma_п$ для всех $i = 0,...,n$. Если оно выполняется с большим запасом, то опора работает упруго и расчет прогибов выполнен корректно. Одновременно получаем эпюру максимальных, нормальных напряжений.

§4. Практический пример

Найдем прогибы композитной опоры ПК-220-1 при типовых нагрузках, указанных производителем ЗАО «Феникс-88» [15] для давления ветра $q_в = 500$ Па. Высота опоры $H = 29$ м, диаметры сечений $d_0 = 0{,}92$ м, $d_n = 0{,}28$ м, толщина $\delta = 0{,}012$ м, модуль Юнга $E = 25$ ГПа, округленные нагрузки $P_п = 5$ кН, $P_т = 3{,}8$ кН, $G_п = 7$ кН, $G_т = 3{,}5$ кН, $G_{оп} = 15$ кН (см. 1.1, 1.2, 1.3). Отсюда получаем удельный вес опоры w = 23,33 кН/куб.м, включающий веса траверс для крепления проводов. Силы P_i, N_i описаны в п. 1.3.

Траверса не влияет на изгибающие моменты за исключением участка опоры длиной 2,4 м между уровням крепления подвесного и опорного изоляторов, на котором изгибающий момент от силы $G_п$ равномерно спадает до нуля на уровне крепления подвеса. Очевидно, что изгибание на этом участке является пренебрежимо малым. Поэтому можно считать, что нагрузки $P_п$, $G_п$, $P_т$, $G_т$ приложены в точках подвеса проводов и грозозащитного троса, т.е., на концах траверз. Именно так и делают обычно [6, 7]. Принимаем $M_г^н = 850$ кНм (максимально-допустимый момент для опоры ПК-220-1, указанный в [15]).

Расчет по вышеизложенной методике удобно провести в MathCad. Получаем кривые прогиба, изображенные на рис. 2. Черная кривая – прогиб от действия только горизонтальных сил, синяя кривая – прогиб с учетом горизонтальных и вертикальных сил.

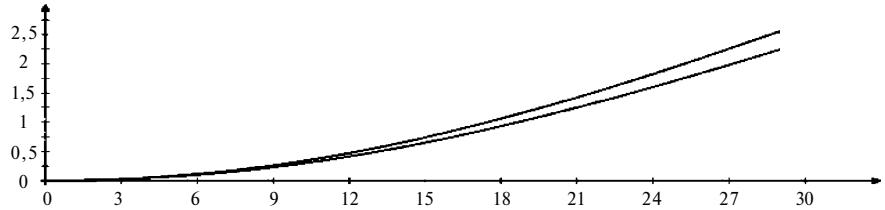

Рис. 2. Прогибы опоры

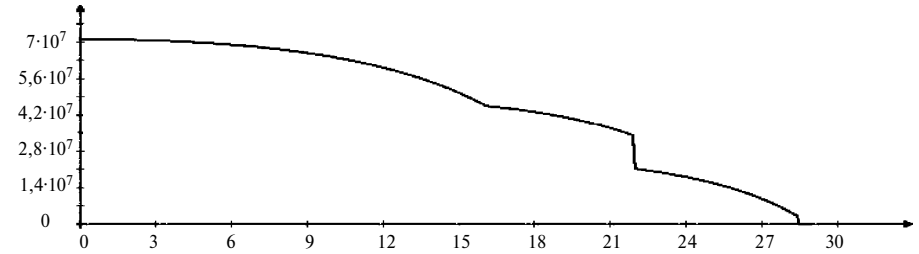

Рис. 3. Эпюра нормальных напряжений

Отклонение вершины опоры (синяя кривая) $f_{\text{п}} = 2{,}56$ м. При расчете только по горизонтальным нагрузкам погрешность $(f_n - f_{Pn})/f_n \cdot 100\%$ составит 12,2%, где $n = 290$.

На рис. 3 по вертикали отложены максимальные напряжения в МПа. Наибольшее, нормальное напряжение $\sigma_{\max,0} \approx 71$ МПа, что примерно в 3 раза ниже предела прочности $\sigma_{\text{п}} \approx 200$ МПа. Таким образом, опора действительно работает упруго. По формуле (8) опрокидывающий момент $\tilde{M}_0 = 547$ кНм. Производитель указывает максимально-допустимый момент 850 кНм и коэффициент надежности $\gamma = 1{,}3$ [15], поэтому опора работает в безопасном режиме.

ЗАО «Феникс-88» предлагает эвристическую формулу для расчета опрокидывающего момента (стр. 15 [15]), которая в данном случае приобретает следующий вид:

$$M = P_{\text{п}} \cdot (2h_{\text{пн}} + h_{\text{пв}}) + 0.25 \cdot 3G_{\text{п}} \cdot H = 276 \text{ кНм}.$$

Этот результат отличается в 2 раза от найденного выше момента $\tilde{M}_0 = 547$ кНм, поэтому эвристические формулы на стр. 15 [15] являются несостоятельными.

Если найти прогибы по описанной методике, считая ветровую нагрузку и собственный вес стойки силами, приложенными на уровне $H/2$ [6], то погрешность прогиба стойки составит 1,2 %, т.е., будет пренебрежимо малой. Погрешность эпюры напряжений более существенна, но не превышает 12,3 % на уровне $H/2$ и 4,2 % у основания опоры. Таким образом, замена ветровой нагрузки и веса стойки сосредоточенными силами дает несущественную погрешность, если стойка не работает вблизи предела прочности.

§5. Точный расчет прогибов

Результат, полученный с помощью описанной выше методики, можно существенно уточнить, решая уравнение (5.21) [14]:

$$\frac{f''(h)}{[1+(f'(h))^2]^{3/2}} = \frac{M(h)}{EJ(h)}, \tag{9}$$

где $f(h)$ — прогиб на уровне h, левая часть (9) равна кривизне осевой линии опоры. Уравнение (9) не является дифференциальным, т.к. изгибающий момент $M(h)$ зависит от нагрузок на участок опоры между уровнями h и H, так что в силу (6-1) [7] имеет место:

$$M(h) = \sum_{h<h_j} [P_j \cdot (h_j - h) + N_j \cdot (\pm a_j) + N_j \cdot (f(h_j) - f(h))]. \tag{10}$$

Сумма $\sum_j N_j \cdot (\pm a_j)$ равна моменту от эксцентриситета; a_j — расстояние от оси опоры до точки приложения силы N_j, знак $\pm$ определяется в зависимости от того, совпадает ли направление ее момента с направлением момента от горизонтальной нагрузки.

Техническая трудность заключается в том, что в правой части уравнения (9) фигурируют значения искомой функции $f(h)$ в дискретных точках h_j. Решить его можно методом последовательных приближений по прогибам в точках i, которые мы обозначаем f_i^N, где $i = 0,\ldots,n$ и N — номер итерации. Получим следующий алгоритм.

1. Задаем оценку ε близости итераций, например $\varepsilon = 0{,}001$ м.

2. Выбираем начальное приближение, как вектор прогибов от действия только горизонтальных сил, определенных согласно (2.2)—(2.4), т.е., $f_i^1 = f_{Pi}$. При этом $N = 1$.

3. Решаем ОДУ 2-го порядка, которое следует из (9) и (10) при $f(h_j)=f_j^N$:

$$f''(h)=\frac{[1+(f'(h))^2]^{3/2}}{EJ(h)}\cdot\sum_{h<h_j}[P_j\cdot(h_j-h)+N_j\cdot(\pm a_j+f_j^N-f(h))] \qquad (11)$$

при $0\le h\le H$ и начальных условия $f(0)=0$, $f'(0)=0$. Получаем решение $f_N(h)$.

4. Вычисляем невязку $\Delta_N=\max\limits_i|f_N(h_i)-f_i^N|$ и проверяем условие $\Delta_N\le\varepsilon$. Если оно выполняется, то $f_N(h)$ — искомая линия прогибов и алгоритм завершен.

5. Если $\Delta_N>\varepsilon$, то принимаем $f_i^{N+1}=f_N(h_i)$ для всех $i=0,...,n$, затем увеличиваем N на единицу и переходим к пункту 3.

Большинство из сил P_i, N_i моделируют ветровую и гравитационную нагрузки на стойку. Поскольку кривизна прогнутой опоры невелика, создаваемые ими изгибающие моменты на уровне h можно вычислять приближенно, считая участок опоры между уровнями h и H прямолинейным. Этот условный участок опоры вдоль хорды линии прогиба образует с вертикалью угол α, где

$$\sin\alpha=(f(H)-f(h))\Big/\sqrt{(H-h)^2+(f(H)-f(h))^2}. \qquad (12)$$

Легко проверить, что если на трапецию с основаниями a, b и высотой l действует равномерно распределенная нагрузка q Н/кв.м, то создаваемый ею момент относительно любой точки основания a равен $ql^2(a/6+b/3)$. Отсюда получаем следующее выражение для части момента (10), которую создают ветровая и гравитационная нагрузки на стойку:

$$M_{\text{в}}(h)=q\cdot(H-h)^2\cdot\left(\frac{d(h)}{6}+\frac{d_n}{3}\right)\cos\alpha,\ M_{\text{г}}(h)=\frac{G_{o\pi}}{S}\cdot(H-h)^2\cdot\left(\frac{d(h)}{6}+\frac{d_n}{3}\right)\sin\alpha, \qquad (13)$$

где $S=(H-h)(d(h)+d_n)/2$ — площадь осевого сечения опоры между уровнями h и H, который мы считаем плоским (трапеция), $d(h)=d_nh/H+d_0(H-h)/H$, d_0, d_n — диаметры поперечных сечений основания и вершины опоры в форме усеченного конуса (цилиндра).

Ясно, что такой способ вычисления моментов от гравитационной и ветровой нагрузок на стойку является достаточно точным для реальных возникающих искривлений композитной опоры, при которых стрела прогиба на порядок меньше хорды. Соответственно, уравнение (11) можно заменить следующим:

$$f''(h)=\frac{[1+(f'(h))^2]^{3/2}}{EJ(h)}\cdot\left(\sum_{h<h_{\text{т,k}}}[P_{\text{т},k}(h_{\text{т},k}-h)+N_{\text{т},k}(\pm a_{\text{т},k}+f_{\text{т},k}^N-f(h))]+M_{\text{в}}(h)+M_{\text{г}}(h)\right), \qquad (14)$$

где $k=1,...,t$ — номера уровней $h_{\text{т,k}}$ в порядке возрастания, на которых располагаются траверсы, силы $P_{\text{т,k}}$, $N_{\text{т,k}}$ являются нагрузками на траверсу k или суммарными нагрузками на уровне $h_{\text{т,k}}$, если на нем 2 траверсы, плечи $a_{\text{т,k}}$ определяется аналогично (10). В случае опоры ПК-220-1 (рис. 1) имеем: $k=1,2,3$, $h_{\text{т},1}=16.1$ м, $h_{\text{т},2}=21.9$ м, $h_{\text{т},3}=28.4$ м, $a_{\text{т},1}=0$, $a_{\text{т},2}=3+0.22=3.22$ м, $a_{\text{т},3}=0.64+0.15=0.79$ м (добавлены радиусы сечений на уровнях траверс), $P_{\text{т},1}=2P_\pi$, $P_{\text{т},2}=P_\pi$, $P_{\text{т},3}=P_\tau$, $N_{\text{т},1}=2G_\pi$, $N_{\text{т},2}=G_\pi$, $N_{\text{т},3}=G_\tau$.

Приходим к методу последовательных приближений по прогибам вершины и на уровнях траверс, которые мы обозначаем $f_{\max}^N$ и $f_{\text{т,k}}^N$ соответственно. Из (12) получаем:

$$\sin\alpha=\frac{f_{\max}^N-f(h)}{\sqrt{(H-h)^2+(f_{\max}^N-f(h))^2}},\ \cos\alpha=\frac{H-h}{\sqrt{(H-h)^2+(f_{\max}^N-f(h))^2}}. \qquad (15)$$

1. Выбираем начальное приближение $f_{\max}^1$ произвольно, но поближе к возможному прогибу вершины и принимаем $f_{\text{т,k}}^1=f_{\max}^1\cdot h_{\text{т,k}}/H$, где $k=1,...,t$ (число уровней траверс).

2. Решаем ОДУ (14) при $0\le h\le H$ и начальных условия $f(0)=0$, $f'(0)=0$, где $M_{\text{в}}(h)$ и $M_{\text{г}}(h)$ определены в силу (13) и (15). Получаем решение $f_N(h)$.

3. Вычисляем невязку $\Delta_N=\max\{|f_N(H)-f_{\max}^N|;|f_N(h_{\text{т},k})-f_{\text{т,k}}^N|:k=1,...,t\}$ и проверяем условие $\Delta_N\le\varepsilon$. Если оно выполняется, то $f_N(h)$ — искомая линия прогибов.

4. Если $\Delta_N > \varepsilon$, то принимаем $f_{\max}^{N+1} = f_{\max}^{N}$ и $f_{\text{т,k}}^{N+1} = f_{\text{т,k}}^{N}$ для всех $k = 1,\ldots,t$, затем увеличиваем N на единицу и переходим к пункту 2.

При вычислении больших прогибов, когда уменьшением уровня вершины $\tilde{H}$ или снижением ветровой нагрузки на искривленную стойку пренебрегать нельзя, первый из этих алгоритмов легко модифицировать. На каждом шаге вычисляются $\tilde{H}$, $\tilde{h}_i$ из уравнений

$$H = \int_0^{\tilde{H}} \sqrt{1+[f'(h)]^2}\,dh, \quad h_i = \int_0^{\tilde{h}_i} \sqrt{1+[f'(h)]^2}\,dh,$$

которые выражают факт неизменности длины оси при изгибании, где $i = 0,\ldots,n$ и $H = n\Delta h$, число $\tilde{h}_i$ равно i-му уровню изогнутой опоры. При этом силы $\text{P}_{\text{в,i}}$, определенные в п. 1.1 §3, умножаются на $\cos\alpha_i = 1\Big/\sqrt{1+[f'(h_i)]^2}$, а силы $G_{\text{оп,i}}$ не меняются. Все символы h_i и h_j в пунктах 1—5 следует заменить на $\tilde{h}_i$ и $\tilde{h}_j$, ОДУ (11) решается при $0 \le h \le \tilde{H}$. С этими дополнениями алгоритм можно использовать для расчета *любых* прогибов защемленной консоли при условии, что она работает упруго.

§6. Сравнение с другими методами

Расчет опоры ПК-220-1 (§4) по данному алгоритму при $\varepsilon = 0{,}001$ м завершается на 6-й итерации. При этом $f_{\text{т,1}}^{6} = 0{,}878$ м, $f_{\text{т,2}}^{6} = 1{,}636$ м, $f_{\text{т,3}}^{6} = 2{,}685$ м, $f_{\max}^{6} = 2{,}787$ м. Опрокидывающий момент $M(0) = 540{,}6$ кНм близок к значению $\tilde{M}_0 = 547$ кНм, найденному согласно [7] (§3,4), однако прогибы от вертикальных нагрузок вычислены значительно точнее. Прогиб вершины от горизонтальных нагрузок $f_{\text{Pn}} = 2{,}24$ м уточняется формулой (3) до значения $f_{\text{n}} = 2{,}56$ м, т.е., на 32 см. Представленный в §5 алгоритм дает $f(\text{H}) = 2{,}79$ м, чем уточняет результат еще на 23 см. При этом ошибка от игнорирования вертикальных нагрузок составила бы 19,7% против 12,2% по методике из [7]. Чтобы точней определить положение вершины опоры следует учесть сокращение ее высоты от изгибания, которое близко к 17,5 см.

Согласно [11], расчет прогибов композитной опоры может быть выполнен по 5.17.3 [16]. Эта методика делит опору на участки $h_{k-1} \le h \le h_k$ с условно постоянной жесткостью EJ, и прогибы $f_k = f(h_k)$ определяются с помощью интеграла Мора. Поскольку изгибающие моменты зависят от прогибов, последние неявно определяются уравнением

$$f_i = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{E_k J_k} \int \bar{M}_i(h)[M_0(h) + M(f_1,\ldots,f_m,h)]dh, \tag{16}$$

где $i,k = 1,\ldots,m$ и f_k — прогиб на уровне верхней границы k-го участка, f_m — прогиб вершины, интегралы вычисляются по отрезкам $h_{k-1} \le h \le h_k$, момент $M_0(h)$ от нагрузки определяется в недеформированном состоянии опоры, момент $M(f_1,\ldots,f_m,h)$ возникает от вертикальных нагрузок в результате деформации. После аппроксимации каждого из интегралов по формуле Симпсона, момент $M(f_1,\ldots,f_m,h)$ линейно выражается через искомые прогибы f_i. Уравнение (16) решается методом итераций (см. п. 5.17.3 [16]).

Применяя этот алгоритм к опоре ПК-220-1 (§4) получим прогиб вершины $f_m = 2{,}86$ м, что на 2,5% превышает значение 2,79 м, полученное точным методом. При этом опрокидывающий момент 552 кНм на 2% превышает 540,6 кНм. Таким образом, методика из [16] дает хорошее приближение. Однако, теория Максвелла – Мора (глава 5 [13]) существенно опирается на условие малости перемещений по сравнению с размерами конструкций. Следовательно, применимость уравнения (16) при больших прогибах не имеет теоретического обоснования и нуждается в опытной проверке. Судя по доступной информации, такие эксперименты с композитными опорами не проводились. Легко видеть, что при неизменной вертикальной нагрузке и нулевом эксцентриситете решения уравнения (16) пропорциональны горизонтальной нагрузке. Уравнение (11) таким свойством не обладает, если условие $|f'(h)| << 1$ не выполняется. Таким образом, при достаточно большом прогибе методика [16] даст существенно неверный результат. Примером может служить искривление, при котором угол отклонения от вертикали близок к $\pi/4$ в центре опоры.

Представленный в §5 метод не ограничен условием малости прогибов и является точным в том смысле, что он исходит из уравнения упругой линии (9), которое не содержит упрощающих предположений. Соответственно, погрешности определения прогибов обусловлены числом n узлов дискретизации и приближенным методом решения уравнения (11), точность которого прак-

тически неограниченна. Сказанное относится только к первому из алгоритмов в §5, поскольку второй алгоритм (уравнения (13), (14)) не различает дуги осевой линии с их хордами при вычислении нагрузок на стойку.

Для вычисления прогибов опор ЛЭП можно использовать метод конечных элементов (МКЭ) [17]. Существуют программные пакеты, реализующие его в инженерных расчетах [18]. В частности, в них может быть предусмотрен расчет прогибов консольной балки [19]. Но такие инструменты не всегда устраивают исследователей из-за закрытости по принципу «черного ящика». Работа [20] может быть полезной при самостоятельном программировании МКЭ для расчета опор. Однако в случае больших прогибов следует иметь в виду, что МКЭ в принципе не обладает точностью метода, основанного на решении нелинейного уравнения (9), поскольку предполагает линейную зависимость между нагрузками и перемещениями.

Представленные в §5,6 алгоритмы не учитывают поворот опоры в грунте, который при достижении предельного угла в 0,01 рад увеличил бы прогиб вершины ПК-220-1 еще на 29 см.

Стандарт [16] выражает этот угол через податливость заделки ϑ (поворот от единичного момента), не определяя метод ее вычисления. Методика, описанная в §2,3 согласно [7], не определяет угол поворота в грунте от действия горизонтальных нагрузок, хотя и учитывает возможность поворота при вычислении поправки на вертикальные нагрузки (5). Поэтому прогибы опоры ПК-220-1, найденные в §4, в полной мере не учитывают этот поворот.

Выводы

При расчете прогибов композитных опор ЛЭП традиционная для энергетики методика недостаточно учитывает вертикальные нагрузки. Стандарт «ФСК ЕЭС» предлагает более точный метод, но при достаточно больших прогибах он теряет точность. Существует вполне адекватный метод, основанный на решении уравнения упругой линии без упрощающих предположений. Оно не относится к ОДУ из-за наличия вертикальных сил. Это уравнение можно решать итерационным алгоритмом (§5), без труда реализуемым в MathCad. Данный алгоритм может применяться к любым одностоечным опорам ЛЭП, а также для расчета продольно-поперечных изгибов произвольных консолей с защемленным концом, работающих в упругом режиме. Он позволяет найти точную форму осевой линии при прогибах одного порядка с размерами конструкции.

Литература

1. *Бочаров Ю.Н., Жук В.В.* Композитные опоры. Перспективы применения для ВЛ 110–750 кВ // Новости электротехники, 2012. № 1 (73). С. 22–25.
2. *Дубина А.А.* Новые конструкции полимерных стоек для опор ВЛ в РФ и Украине // Воздушные линии, 2011. № 3 (4). С. 27–31.
3. *Бочаров Ю.Н., Жук В.В., Пыльнева А.И.* Компактные композитные опоры с изолирующими стойками для высоковольтных воздушных линий // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, 2014. № 4 (207). С. 7—15.
4. *Sarmento M., Lacoursiere B.* A State of the Art Overview Composite Utility Poles for Distribution and Transmission Applications // Transmission and Distribution Conference and Exposition. Venezuela. 2006. P. 1—4.
5. Правила устройства электроустановок. Утверждены Приказом № 204 Минэнерго РФ от 08.07.2002.
6. *Короткевич М.А., Млынчик М.И.* Определение прогибов железобетонных стоек опор воздушных линий электропередачи // Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ, 2011. № 5. С. 11 — 16.
7. *Реут М.А., Рокотян С.С.* и др. Справочник по проектированию линий электропередачи. — М.: Энергия, 1980. — 296 с.
8. *Фрайфельд А.В., Брод Г.Н.* Проектирование контактной сети. — М.: Транспорт, 1991. — 335.
9. *Колтхарп С., Вайд Т.* Композитные опоры уверенно противостоят стихии // Энергоэксперт, 2010. № 6. С. 26–28.
10. Правила технической эксплуатации электроустановок потребителей. Утверждены приказом Минэнерго РФ № 6 от 13 января 2003.
11. Методические указания по проектированию ВЛ 110 — 220 кВ с применением композитных опор. СТО 34.01-2.2-001-2015. Стандарт ПАО «Россети». 2015.
12. *Moschas F., Stiros S.* High accuracy measurement of deflections of an electricity transmission line tower // Engineering Structures. 2014. V. 80. P. 418 – 425.
13. *Дарков А.В., Шапошников Н.Н.* Строительная механика. — М.: Высш. школа. 1986. — 607 с.
14. *Фесик С.П.* Справочник по сопротивлению материалов. — Киев: Будівельник. 1982. — 280 с.
15. ЗАО «Феникс-88». Каталог продукции — композитные опоры ЛЭП. // http://www.fenix88.nsk.su/files/kom_opor/opori_lep2014.pdf.

16. Руководство по проектированию многогранных опор и фундаментов к ним для ВЛ напряжением 110-500 кВ. СТО 56947007-29.240.55.054-2010. Стандарт ОАО «ФСК ЕЭС». 2010.

17. *Секулович М.* Метод конечных элементов. — М.: Стройиздат, 1993. — 664 с.

18. *Алямовский А.А.* SolidWorks/COSMOSWorks. Инженерный анализ методом конечных элементов. – М.: ДМК Пресс, 2004. – 432 с.

19. *Басов К.А.* ANSYS Справочник пользователя. — М.: ДМК, 2005. — 640 с.

20. *Muppavarapu R.* Nonlinear finite element analysis of columns. Master of science in aerospace engineering thesis. The university of Texas at Arlington. 2011.

Literatura

1. *Bocharov Yu.N., Zhuk V.V.* Kompozitnyie oporyi. Perspektivyi primeneniya dlya VL 110–750 kV // Novosti elektrotehniki, 2012. № 1 (73). S. 22–25.

2. *Dubina A.A.* Novyie konstruktsii polimernyih stoek dlya opor VL v RF i Ukraine // Vozdushnyie linii, 2011. № 3 (4). S. 27–31.

3. *Bocharov Yu.N., Zhuk V.V., Pyilneva A.I.* Kompaktnyie kompozitnyie oporyi s izoliruyuschimi stoykami dlya vyisokovoltnyih vozdushnyih liniy // Nauchno-tehnicheskie vedomosti Cankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politehnicheskogo universiteta, 2014. № 4 (207). S. 7—15.

4. *Sarmento M., Lacoursiere B.* A State of the Art Overview Composite Utility Poles for Distribution and Transmission Applications // Transmission and Distribution Conference and Exposition. Venezuela. 2006. P. 1—4.

5. Pravila ustroystva elektroustanovok. Utverzhdenyi Prikazom № 204 Minenergo RF ot 08.07.2002.

6. *Korotkevich M.A., Mlyinchik M.I.* Opredelenie progibov zhelezobetonnyih stoek opor vozdushnyih liniy elektroperedachi // Energetika. Izvestiya vyisshih uchebnyih zavedeniy i energeticheskih ob'edineniy SNG, 2011. № 5. S. 11 — 16.

7. *Reut M.A., Rokotyan S.S.* i dr. Spravochnik po proektirovaniyu liniy elektroperedachi. — M.: Energiya, 1980. — 296 s.

8. *Frayfeld A.V., Brod G.N.* Proektirovanie kontaktnoy seti. — M.: Transport, 1991. — 335.

9. *Koltharp S., Vayd T.* Kompozitnyie oporyi uverenno protivostoyat stihii // Energoekspert, 2010. № 6. S. 26–28.

10. Pravila tehnicheskoy ekspluatatsii elektroustanovok potrebiteley. Utverzhdenyi prikazom Minenergo RF № 6 ot 13 yanvarya 2003.

11. Metodicheskie ukazaniya po proektirovaniyu VL 110 — 220 kV s primeneniem kompozitnyih opor. STO 34.01-2.2-001-2015. Standart PAO «Rosseti». 2015.

12. *Moschas F., Stiros S.* High accuracy measurement of deflections of an electricity transmission line tower // Engineering Structures. 2014. V. 80. P. 418 – 425.

13. *Darkov A.V., Shaposhnikov N.N.* Stroitelnaya mehanika. — M.: «Vyisshaya shkola». 1986. — 607 s.

14. *Fesik S.P.* Spravochnik po soprotivleniyu materialov. — Kiev: «Budivelnik». 1982. — 280 s.

15. ZAO «Feniks-88». Katalog produktsii — kompozitnyie oporyi LEP. // http://www.fenix88.nsk.su/files/kom_opor/opori_lep2014.pdf.

16. Rukovodstvo po proektirovaniyu mnogogrannyih opor i fundamentov k nim dlya VL napryazheniem 110-500 kV. STO 56947007-29.240.55.054-2010. Standart OAO «FSK EES». 2010.

17. *Cekulovich M.* Metod konechnyih elementov. — M.: Stroyizdat, 1993. — 664 s.

18. *Alyamovskiy A.A.* SolidWorks/COSMOSWorks. Inzhenernyiy analiz metodom konechnyih elementov. – M.: DMK Press, 2004. – 432 s.

19. *Basov K.A.* ANSYS Cpravochnik polzovatelya. — M.: DMK, 2005. — 640 s.

20. *Muppavarapu R.* Nonlinear finite element analysis of columns. Master of science in aerospace engineering thesis. The university of Texas at Arlington. 2011.

Уважаемые читатели!

Напоминаем, что продолжается **ПОДПИСКА** на журнал:
РОСПЕЧАТЬ 18317/36188.

В редакции можно купить любой номер журнала
или его электронную версию (stroymex@list.ru).