Об уравнениях Соколова динамики излучающего электрона

Д.Б. Зотьев, д.ф.-м.н. (геометрия и топология)

Аннотация

В статье [2] была предложена так называемая перенормировка уравнения Лоренца-Абрахама-Дирака (ЛАД). Последнее описывает движение электрона в электромагнитном поле с учетом реакции излучения. Во многих статьях И.В. Соколова и его коллег эта модель позиционируется, как наиболее подходящая в ситуации, когда электрон находится под действием супер-сильного лазерного поля. В настоящей статье показано, что такие претензии безосновательны и физическая значимость этой модели слишком преувеличена. Уравнение Соколова страдает от многочисленных недостатков, возникающих в связи с тем, что оно представляет собой не модифицированное, а искаженное уравнение ЛАД. В частности, в рамках этой модели возникают сверхсветовые парадоксы.

§ 1. Уравнение Соколова

Динамическое уравнение электрона в электромагнитном поле выглядит следующим образом:

$$m\ddot{x}^i = \frac{e}{c}F^{ij}\dot{x}_j \tag{0}$$

Точка сверху всюду означает производную по собственному времени τ. В уравнении Лоренца-Абрахама-Дирака (ЛАД) [1] была принята во внимание реакция излучения:

$$m\ddot{x}^i = \frac{e}{c}F^{ij}\dot{x}_j + m\tau_0\dddot{x}^i + \frac{m\tau_0\ddot{x}^2}{c^2}\dot{x}^i \tag{1}$$

где $\tau_0 = 2e^2/(3mc^3) \approx 6.2 \cdot 10^{-24}$ сек. ЛАД эквивалентно системе уравнений:

$$\dot{p}^i = \frac{e}{c}F^{ij}\dot{x}_j - \dot{p}^i_{rad} \qquad \dot{x}^i = \frac{1}{m}p^i + \dot{x}^i_{rad} \tag{2}$$

где поправки на излучение выражаются следующими формулами:

$$\dot{p}^i_{rad} = -\frac{m\tau_0\ddot{x}^2}{c^2}\dot{x}^i \qquad \dot{x}^i_{rad} = \tau_0\ddot{x}^i \tag{3}$$

Таким образом, в «фазовых координатах» ЛАД можно переписать в виде системы уравнений:

$$\dot{p}^i = \frac{e}{c}F^{ij}\dot{x}_j + \frac{m\tau_0\ddot{x}^2}{c^2}\dot{x}^i \qquad \dot{x}^i = \frac{1}{m}p^i + \tau_0\ddot{x}^i \tag{4}$$

Следующие два релятивистских тождества играют в дальнейшем ключевую роль:

$$(V) \quad \dot{x}^2 = c^2 \ , \qquad (P) \quad p^2 = m^2c^2$$

где $\dot{x}^2 = \dot{x}^i\dot{x}_i$ и $p^2 = p^ip_i$ относительно метрического тензора $g_{ij} = diag(1, -1, -1, -1)$.

Условие (V) выполнено для любых решений уравнения (1), удовлетворяющих $\dot{x}^i(0)\dot{x}_i(0) = c^2$ и $\dot{x}^i(0)\ddot{x}_i(0) = 0$. Действительно, для такого решения $x^i(\tau)$ следующее ОДУ относительно $z = \dot{x}^2/c^2 - 1$

$$\ddot{z} = \frac{1}{\tau_0}\dot{z} - \frac{2}{c^2}\ddot{x}^2 z$$

имеет единственное решение $z(\tau) \equiv 0$, удовлетворяющее $z(0) = 0$ и $\dot{z}(0) = 0$. Это уравнение было получено из (1) путем умножения на $\dot{x}_i$ и свертывания по i.

Но в случае ЛАД условие (P) несущественно нарушается (§3). В работе [2] была предложена система уравнений, для которых справедливо (P), однако допускаются нарушения (V). В связи с этим система (2) с произвольными x^i_{rad} и p^i_{rad} рассматривалась при условии (17) [2]:

$$\frac{e}{c}p^iF_{ij}\dot{x}^j_{rad} = p_i\dot{p}^i_{rad} \tag{5}$$

Легко проверить, что (5) эквивалентно $\dot{p}^ip_i = 0 \ \Leftrightarrow \ p^2 = const$. Одна из систем (2), удовлетворяющих (5), определяется условиями(18) [2]:

$$\dot{p}^i_{rad} = \frac{I}{mc^2}p^i \ , \quad \dot{x}^i_{rad} = \frac{\tau_0}{m}\frac{I}{I_E}f^i_L \ , \quad I_E = -\frac{\tau_0}{m}f^2_L \ , \quad f^i_L = \frac{e}{mc}F^{ij}p_j \tag{6}$$

где f^i_L и I_E называются силой Лоренца и интенсивностью электро-дипольного излучения, неопределенная величина I с размерностью мощности называется интенсивностью излучения. Обратите внимание, что $p^i \neq m\dot{x}^i$ как в случае уравнения ЛАД так и Соколова. Уравнения (2) и (6) приводят к:

$$\dot{p}^i = \frac{e}{mc}F^{ij}p_j - \frac{I}{mc^2}p^i + \frac{\tau_0e^2}{m^2c^2}\frac{I}{I_E}F^{ik}F_{kj}p^j \tag{7}$$

Уравнения (7) не достаточно для описания динамики, так как сейчас $p^i \neq m\dot{x}^i$. Автор заявляет о возможности использовать произвольное I, включая случайные функции [2]. Если положить $I = I_E$, то из (2) и (6) получается следующая система (19) [2] :

$$\dot{p}^i = \frac{e}{c}F^{ij}\dot{x}_j + \frac{\tau_0f^2_L}{m^2c^2}p^i \qquad \dot{x}^i = \frac{1}{m}p^i + \frac{\tau_0}{m}f^i_L \tag{8}$$

В §9 [2] уравнения (8) переписаны в 3-мерном виде (21), (22), (23) [2]. Эти последние, а также (7) и (8) называются уравнением Соколова, в дальнейшем СОУ. Автор называет его перенормированным или модифицированным ЛАД.

В соответствии с §5 [2], слово «перенормированное» подразумевает переопределение оператора $\hat{m} : \dot{x}^j \longmapsto p^j$, который определяется уравнениями динамики. Для ЛАД и СОУ эти операторы выглядят соответственно:

$$\hat{m}^i_j = m\Big(1 - \tau_0 \frac{d}{d\tau}\Big)\delta^i_j \qquad (\hat{m}^{-1})^i_j = \frac{1}{m}\Big(\delta^i_j + \frac{\tau_0 e}{mc}\frac{I}{I_E}F^{i\cdot}_{j}\Big)$$

Очевидно, что второй «оператор» не имеет ничего общего с обратным к первому. К тому же он не является линейным оператором, вообще говоря. В самом деле, I_E зависит от p^i (6). Если I не пропорциональноI_E, то $\hat{m}$ не является линейным оператором и, следовательно, не может рассматриваться, как оператор вообще. Автор утверждает, что (6) может иметь квантовую интерпретацию при использовании случайных функций I (см. §8 [2]). Но тогда понятие оператора $\hat{m}$ потеряет смысл.

Следующее утверждение из аннотации к [2] указывает на Дирака, как первоисточник СОУ: «*Настоящий анализ использует идею, которая была выдвинута Дираком в [1], но никогда не была развита.*» Никаких оснований для такого мнения не найдено в [1]. Ни одной ссылки или соответствующей цитаты из Дирака в [2] не указано. Читателю предлагается поверить, что где-то и когда-то Дирак сказал нечто, что освящает этот результат? Примером может служить следующая цитата из §6 [2]: «*Произвол в выражении для импульса (то есть, в перенормировке оператора массы) отмеченный Дираком, заключается в выборе того, какое из этих тождеств следует отбросить ...* ». Какие работы Дирака указывают на это? В статье [1] нет ничего подобного, другие ссылки на Дирака в [2] не приводятся.

Для той же задачи было предложено уравнение Ландау-Лифшица (ЛЛ) в $(76, 3)$ [14]:

$$m\ddot{x}^i = \frac{e}{c}F^{ij}\dot{x}_j + \frac{e}{c}\tau_0\frac{\partial F^{ik}}{\partial x_l}\dot{x}_k\dot{x}_l - \frac{3c}{2}\tau_0^2 F^{ij}F^{k}_{\cdot j}\dot{x}_k + \frac{3}{2c}\tau_0^2 F^{jk}F^{\cdot l}_{j}\dot{x}_k\dot{x}_l\dot{x}^i \tag{9}$$

Дифференцируя 2-ое уравнение (8), получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}^i = {} & \tfrac{e}{c}F^{ij}\dot{x}_j + \tfrac{e}{c}\tau_0\tfrac{\partial F^{ik}}{\partial x_l}\big(\dot{x}_k - \tfrac{f_{L,k}}{m}\tau_0\big)\big(\dot{x}_l - \tfrac{f_{L,l}}{m}\tau_0\big) - \tfrac{3c}{2}\tau_0^2 F^{ij}F^{k}_{\cdot j}\big(\dot{x}_k - \tfrac{f_{L,k}}{m}\tau_0\big) + \\ & + \tfrac{3}{2c}\tau_0^2 F^{jk}F^{\cdot l}_{j}\big(\dot{x}_k - \tfrac{f_{L,k}}{m}\tau_0\big)\big(\dot{x}_l - \tfrac{f_{L,l}}{m}\tau_0\big)\big(\dot{x}^i - \tfrac{f^i_L}{m}\tau_0\big) + \tau_0^3(\ldots) \end{aligned} \tag{10}$$

Пренебрегая $\tau_0^3(\ldots)$ и всеми членами с множителями $f_L\tau_0/m$ мы получили бы (9). Но этого нельзя делать в ультрарелятивистском случае, для которого, согласно Соколову, его уравнения предназначены. Действительно, в таком случае поправка на излучение $\dot{x}^i_{rad}$ может быть сравнима с $\dot{x}^i$ (2). Так как $\dot{x}_{rad} = f_L\tau_0/m$ (8), то члены с множителями $f_L\tau_0/m$ отбрасывать нельзя. Дальнейшие попытки выразить f^i_L через x^i с использованием 2-го уравнения (2) и (8) приведут только к «рекурсивным вызовам» со все более сложными формулами. Следовательно, (10) не может быть сведено к ОДУ 2-го порядка по отношению к x^i, имеющему явно определенную правую часть. Сравнивая (9) и (10) легко видеть, что СОУ существенно отличается от ЛЛ.

Статья [2] стала источником для многих других публикаций, связанных с динамикой электрона с учетом реакции излучения. Среди них [3 - 9], где уравнения СОУ представлены, как более успешные по сравнению с ЛАД. Автор решительно заявляет о преимуществах своей модели, опираясь, в действительности, на субъективные оценочные суждения.

В работе [4] утверждается следующее. «*В [24,25] описан самосогласованный вывод модифицированного уравнения ЛАД для электронов с учетом излучения электронов и электроного тока в плазме. Показано, что новое уравнение свободно от саморазгоняющихся решений, обеспечивая другой набор точных законов сохранения.*»

На самом деле СОУ представляет собой искаженное, а не модифицированное ЛАД (§2). Как показано в §3, закон сохранения энергии-импульса имеет место в случае ЛАД и нарушается в СОУ. Автор не уточнил, какие другие законы сохранения из «другого набора» он имел в виду. Что касается сохранения обобщенного импульса, то в статье [3] было отмечено, что он может иметь место только в частном случае, когда $\mathbf{n} \cdot \nabla A^i = 0$ и $\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = 0$ для некоторого направления $\mathbf{n}$. Очевидно, что такое движение электронов в лазерном поле невозможно. Таким образом, упоминание о сохранении обобщенного импульса играет декоративную роль.

В работе [9] следующее оценочное суждение представлено, как подтвержденный и общепризнанный факт. «*Еще один способ решения этой задачи был предложен посредством перенормировки уравнения ЛАД. Новое уравнение лучше удовлетворяет законам сохранения для релятивистских частиц, предлагает эффективную численную схему и допускает ее расширение в направлении КЭД - режимов*».

На самом деле мнение о том, что КЭД хорошо совместима с СОУ, не имеет под собой серьезных оснований (§5). В работах [2 - 10] не найдено никакой информации об экспериментальном подтверждении этой математической модели. С теоретической точки зрения результат Соколова весьма сомнителен. Несмотря на это, сейчас он занимает почетное место среди классических результатов по этой проблеме [11,12].

Более трезвые оценки также существуют. Примером может служить §3.4 [13]. «*С момента своего создания, теория Соколова привлекла к себе значительное внимание (хотя она все еще далека от общепринятой). Тем не менее, следует отметить, что эта теория слишком страдает рядом недостатков, вытекающих из отказа от условия нормировки в (28).*»

Здесь условием нормализации является тождество $\dot{x}^2 = c^2$ (см. (V) ниже (4)). Следующий вывод из §3.4 [13] является ошибочным. «*Совсем недавно Соколов ввел уравнение, которое радикально отходит от традиционного принципа физики, в данном случае, что 4-импульс должен быть коллинеарен 4-скорости*». Такая неколлинеарность также имеет место в случае ЛАД.

§ 2. Искажение ЛАД

Формулы (6) могут быть получены с помощью одного условия (P), без каких-либо других физических идей. Действительно, взяв ЛАД за основу и считая, что $p^i = m\dot{x}^i$, из (3) видно, что $\dot{p}^i_{rad} = Kp^i$ и $\dot{x}^i_{rad} = Mf^i_L$ для некоторых величин K и M. Тогда, считая (5) и (P) имеющими место, легко получить, что

$$\dot{x}^i_{rad} = K\tau_0 \frac{c^2}{I_E} f^i_L$$

Поскольку $[K] = sec^{-1}$ то $I = Kmc^2$ имеет размерность мощности (или интенсивности чего-либо). Выражая K через I отсюда мгновенно получаются формулы (6). Таким образом, получено СОУ с совершенно произвольной величиной I. В частности, она может быть не связана с данными электроном и полем. Физическая пустота такой модели очевидна.

Условие (P) выполняется для любого решения СОУ $x^i(\tau), p^i(\tau)$, удовлетворяющего условию $p^i(0)p_i(0) = m^2c^2$. Действительно, после умножения на p_i и свертывания по i 1-ое уравнение (2) с учетом (6) приводит к следующему ОДУ относительно $y = p^2 - m^2c^2$:

$$\dot{y} = -\frac{2I}{mc^2} y$$

Последнее имеет единственное решение $y(\tau) \equiv 0$, удовлетворяющее $y(0) = 0$. Легко проверить, что это доказательство также работает в случае, когда

$$\dot{p}^i = \frac{e}{c} F^{ij}\dot{x}_j + \frac{e\tau_0}{m^2c^3}\big(F^{jk}\ddot{x}_j p_k\big)p^i \qquad \dot{x}^i = \frac{1}{m}p^i + \tau_0 \ddot{x}^i \tag{11}$$

Первое уравнение (11) имеет точно такой же вид, как и 1-ое уравнение (8), если интенсивность электро-дипольного излучения определяется по следующей формуле:

$$I = I_E = -\frac{e\tau_0}{mc} F^{jk} \ddot{x}_j p_k$$

В случае $p^i = m\dot{x}^i$ это дало бы такое же значение, что и 3-я формула (6). Следует отметить, что в рассматриваемом случае последняя формула (6) отличается от правой части (0). Очевидно, что нет никаких физических причин считать формулу для I_E, предполагаемую в (11), хуже, чем 3-я формула (6). При этом 2-е уравнение (11) выглядит более адекватным, принимая во внимание классическую формулу для силы реакции излучения (75,8 [14]).

Таким образом, система уравнений (11) представляет собой другое «перенормированное ЛАД» с тем же свойством по отношению к (P), что и СОУ. А именно, любое решение (11) $x^i(\tau), p^i(\tau)$, удовлетворяющее начальному условию $p^i(0)p_i(0) = m^2c^2$, удовлетворяет условию (P) в каждый момент времени τ. Этот пример ясно показывает, что условие (P), само по себе, не может считаться источником физически содержательных уравнений динамики электрона. Хотя это не очень просто разглядеть в статье [2], никакие другие источники там не использовались, несмотря на большое количество нечетких рассуждений, которые не имеют прямого отношения к *реальной* процедуре получения СОУ.

Нетрудно придумать совершенно другую систему (2), которая также обеспечивает решения, удовлетворяющие (P). В самом деле, для некоторой константы A рассмотрим уравнения:

$$\dot{p}^i_{rad} = A\tau_0 \dot{p}_i \qquad \dot{x}^i_{rad} = -A\tau_0 \dot{x}_i \ , \qquad 0 < |A|\tau_0 < 1$$

Тогда из (2) можно получить следующее, притягательно простое уравнение:

$$m\ddot{x}^i = \frac{e}{c(1+A\tau_0)^2} F^{ij} \dot{x}_j$$

Легко проверить, что для каждого его решения имеем $p^2 = const$. Если выбрано частичное решение, удовлетворяющее (P), то $\dot{x}^2 = c^2/(1 + A\tau_0) \neq c^2$. Это нарушение (V) будет мало для достаточно малой константы A, которая должна быть определена экспериментально. Какие есть основания, чтобы считать эти уравнения менее подходящими, чем (8)? Обе системы базируются на (2), удовлетворяют условию $p^2 = const$ и не были подтверждены экспериментами. Если предположить, что $\tau_0 = 0$, то обе системы сводятся к (0). Можно ли рассматривать это уравнение, построенное совершенно произвольно, как «перенормированное ЛАД», которое является более строгим и подходит для описания электронов в сверхсильных лазерных полях? Вопрос является, конечно, риторическим.

Рассмотрим неожиданно простой способ получения СОУ непосредственно из ЛАД для случая $I = I_E$. Выразим правые части формул (3) через переменные p^i, предполагая, что $p^i = m\dot{x}^i$ и $\dot{p}^i = e/(mc) \cdot F^{ij} p_j$ (эти уравнения описывали бы движение без учета радиационной силы). В самом деле, пусть $\dot{x}^i_{rad} = \tau_0 \dot{p}^i/m = \tau_0/m \cdot f^i_L$. Поскольку $\tau_0^2 \ddot{x}^2 = \dot{x}^2_{rad}$, то $\dot{p}^i_{rad} = I_E/(mc^2) \cdot p^i$, где I_E определено в (6). Тогда система (8) следует из (2). Таким образом, СОУ представляет собой не перенормировку, а *искажение* ЛАД.

В работе [3] автор пытался вывести уравнение (7), которое совпадает с (5) [3], из закона сохранения энергии-импульса. Там был рассмотрен случай, когда электрон поглощает n фотонов плоской волны и испускает фотон с большей энергией, т.е., $p^i_1 = p^i_0 + n\hbar k^i_0 - \hbar k^i_1$.

Рассмотрим рассуждения из [3] внимательно. Обозначив $\delta p = p_1 - p_0$ и предполагая, что $p^2 = (p \cdot p) = m^2c^2$ можно сделать вывод о том, что $(\delta p \cdot p) = 0$. Последнее было бы справедливо в случае

$$\delta p^i = \frac{(k_1 \cdot p_0)}{(k_0 \cdot p_0)} \hbar k^i_0 - \hbar k^i_1 \tag{12}$$

который автор использовал в качестве основного предположения. Но это означает, что $(k_1 \cdot p_0) = n(k_0 \cdot p_0)$ и непонятно, почему такое «правило отбора» должно быть верно, принимая во внимание, что волновой вектор $\mathbf{k}_1$ излучаемого фотона может иметь любое направление. Например, если электрон движется навстречу волне и испускает фотон в направлении $\mathbf{e}_x$, то $\mathcal{E}_0(n\omega_0 - \omega_1)/c + p_{0x}(n\omega_0 + \omega_1) = 0$. Последнее, очевидно, невозможно, если $\mathcal{E}_0/c \approx p_{0x}$.

Поэтому уравнение (12) и, следовательно, (3) [3] является ошибочными, но это было не единственной ошибкой. В работе [3] 2-е уравнение (6) с $f^i_L = f^i_{L0}$ было получено путем усреднения 1-го уравнения (4) [3] в сопутствующей системе отсчета (MCLF). Но таким образом можно было бы получить только то, что:

$$\frac{dx^i_{rad}}{d\tau} = -\frac{f^i_{L0}}{f^2_{L0}} \int \frac{(p_0 \cdot \hbar k_1)}{m\Delta\tau} \frac{\partial W}{\partial \omega_1} d\omega_1 = \frac{\tau_0}{mI_E} f^i_{L0} \frac{1}{\Delta\tau} \int_0^\infty \hbar\omega_1 \frac{\partial W}{\partial \omega_1} d\omega_1 = \frac{\tau_0}{m} \frac{\widetilde{I}}{I_E} f^i_{L0}$$

В работе [3] выражение для $\widetilde{I}$ было произвольно заменено следующим:

$$I = \int_{\omega_{min}}^\infty \hbar\omega_1 \frac{dW}{d\omega_1 d\tau} d\omega_1 \tag{13}$$

Значение $\Delta\tau$ не определяется и не объясняется. Такие грубые, эвристические рассуждения не могут быть приняты в качестве вывода 2-го уравнения (6), даже если можно было бы предположить, что уравнение (12) верно.

Формула (13) выглядит странно, так как подынтегральная функция содержит бесконечно большой коэффициент $dW/d\tau d\omega_1$. Такие математически аномальные выражения, где один символ d в числителе и несколько d в знаменателе, играют важную роль в работе [5]. Авторы использовали их, подразумевая физические интерпретации, которые аналогичны следующей. А именно, $W/d\tau$ обозначает вероятность испускания фотона в единицу времени. При этом символ $d/d\tau$ используется в качестве дифференциального оператора. Такого рода трюки обсуждаются в §5.

Кроме того, автор постулировал 1-е уравнение (6), ссылаясь на §73 [14]. Но из уравнения (73,3) [14] следует, что $\dot{p}_{rad} = I_E/(mc^2) \cdot p^i$ где $p^i = m\dot{x}^i$ и I_E — интенсивность электро-дипольного излучения. В работе [3] последнее было произвольно замещено нечеткой (fuzzy) величиной I. Таким образом, какой-либо физический вывод 1-го и 2-го уравнения (6), а также (7) = (5) [3] отсутствует. На самом деле некоторые уравнения, в том числе ошибочные, были произвольно подогнаны под желаемый результат.

Рассмотрим аналитическое решение СОУ, которое представлено в §11 [2]. Рассматривается электрон в однородном электростатическом поле $\mathbf{E}$. Решение системы (8) задается формулами:

$$
\begin{gathered}
p_x(\tau) = mc\sinh(\omega\tau), \quad p_{x,rad} = mc\omega\tau_0(\cosh(\omega\tau) - 1)\\
\mathcal{E} = mc^2\cosh(\omega\tau), \quad \mathcal{E}_{rad} = mc^2\omega\tau_0\sinh(\omega\tau)\\
x = c\omega^{-1}(\cosh(\omega\tau) - 1) + c\tau_0\sinh(\omega\tau)\\
t = \omega^{-1}\sinh(\omega\tau) + \tau_0(\cosh(\omega\tau) - 1), \qquad \omega = eE/(mc)
\end{gathered}
$$

Если $\tau_0 = 0$, то эти уравнения сводятся к формулам §20 [14]. Однако, параметр τ не совпадает с собственным временем, т.к. $\dot{x}^i\dot{x}_i = c^2\dot{t}^2 - \dot{x}^2 = c^2(1 - \omega^2\tau_0^2) \neq c^2$. Это значит, что $d\tau \neq \sqrt{1 - v^2/c^2} \cdot dt$. Поэтому зависимости $p_x = p_x(\tau)$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\tau)$, $x = c\omega^{-1}(\cosh(\omega\tau) - 1)$, $t = \omega^{-1}\sinh(\omega\tau)$ не представляют собой закон движения без учета затухания Лоренца. В дополнение к искажению собственного времени τ, еще одной особенностью модели Соколова является последняя формула (6) для силы Лоренца. Она отличается от обычной, и в этом (1-мерном) случае разница выглядит следующим образом:

$$
\frac{e}{mc}F^{ij}p_j = \begin{bmatrix} f_L^1 \\ f_L^2 \end{bmatrix} = -eE\begin{bmatrix} \sinh(\omega\tau) \\ \cosh(\omega\tau) \end{bmatrix}, \quad f_L^2 \cdot \frac{d\tau}{dt} = -\frac{eE\cosh(\omega\tau)}{\cosh(\omega\tau) + \omega\tau_0\sinh(\omega\tau)}
$$

$$
\frac{e}{c}F^{ij}\dot{x}_j = \begin{bmatrix} f^1 \\ f^2 \end{bmatrix} = -eE\begin{bmatrix} \sinh(\omega\tau) \\ \cosh(\omega\tau) \end{bmatrix} - \frac{(eE)^2\tau_0}{mc}\begin{bmatrix} \cosh(\omega\tau) \\ \sinh(\omega\tau) \end{bmatrix}, \quad f^2 \cdot \frac{d\tau}{dt} = -Ee
$$

где $i, j = 1, 2$. Погрешность $|f^i - f^i_L|$ имеет порядок величины силы реакции излучения, потому что $\dot{p}_{x,rad} = (eE)^2\tau_0/(mc)\cdot\sinh(\omega\tau)$. Также видно, что значение eE 3-силы Лоренца не получается из f^2_L (не путайте здесь компоненту f^2_L с суммой $f^i_L f_{L,i}$). Таким образом, искажение понятия силы Лоренца в модели Соколова является весьма существенным.

§ 3. Сохранение энергии-импульса

В начале §9 [2] автор утверждает, что «*разница с ЛАД очень мала*» ссылаясь на то, что все различные члены содержат малый множитель τ_0. Этот аргумент не выдерживает критики, потому что τ_0 не может считаться малым без пренебрежения рассматриваемым эффектом. Очевидно, что относительная разница между решениями (4) и (8) имеет порядок величины относительной погрешности, которая возникает из-за пренебрежения реакцией излучения ($\sim \tau_0$). На самом деле, системы (4) и (8) совершенно различны. Это хорошо видно при сравнении (1) и (10).

Как показано в §2, уравнение ЛАД было не «модифицировано» и не «перенормировано», а просто искажено. Автор часто утверждает, что его система (8) является более строгой по сравнению с (4). Эти утверждения основаны *исключительно* на том, что, в отличие от (8), вдоль решений (4) нарушается условие (P). Для любого решения ЛАД имеем

$$p^2 = m^2(c^2 + \tau_0^2\ddot{x}^2) < m^2c^2 \quad \text{если} \quad \ddot{x}^2 \neq 0. \tag{14}$$

Относительное значение ε отклонения (14) имеет порядок $\sim \tau_0^2\ddot{x}^2/c^2$. Оценка силы реакции излучения, как $dp^i_{rad}/dt \sim 10^4$, приводит к $\dot{p}^i_{rad}\gamma^{-1} = -m\tau_0\ddot{x}^2\dot{x}^i\gamma^{-1}/c^2 \sim 10^4$ дин и, следовательно, $\varepsilon \sim 0.1\%$. Здесь $\gamma^{-1} = \sqrt{1 - v^2/c^2}$. В §10 [2] дан критерий применимости классического подхода:

$$\frac{\hbar^2|f^2_L|}{m^2c^2} \ll m^2c^4 \tag{15}$$

Рассмотрим случай $|\mathbf{E}| = |\mathbf{H}| = E$ и $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = 0$, который адекватен задаче о движении электрона в сильном лазерном поле. Выберем координатные оси таким образом, что $E_y = E_z = H_x = H_z = 0$ и $E_x = H_y = E$ в фиксированный момент времени. Тогда

$$f^2_L = f^i_L f_{L,i} = e^2/(mc)^2 \cdot F^{ij}F_{ik}p_j p^k = -e^2/(mc)^2 \cdot E^2\Big(\frac{\mathcal{E}}{c} - p_z\Big)^2 \tag{16}$$

Предполагая $\gamma \sim 1$ из (15) и (16) вытекает условие $|eE| \ll 10^4$. Эта оценка остается верной и тогда, когда $\gamma \gg 1$. Гигантская сила $\sim 10^4$ дин действовала бы на электрон в поле с интенсивностью $\sim 10^{14}$, что на 3 - 4 порядка больше, чем импульсные лазеры способны генерировать сегодня. Таким образом, оценка $\varepsilon \ll 0.1\%$ выглядит реалистично и проблема с (14) не столь драматична, как можно было бы подумать, читая [2] и другие статьи И.В. Соколова.

Проблема массы покоя, которая описана в §7 [2], на самом деле является ничтожной. Оценим численно отклонение массы покоя неподвижного электрона, который ускоряется некоторой силой ($\mathbf{p} = 0$). Если для такого электрона мы имеем $\mathcal{E} = (1 - \delta)mc^2$ при $\delta \approx 0$, то $|\ddot{\mathbf{r}}| = \sqrt{2\delta} \cdot c/\tau_0$. Согласно (15) сила Лоренца $eE \ll 10^4$ дин, следовательно $\delta \ll 0.001\%$.

Таким образом, недостаток (14) представляет собой небольшую плату за то, что самодействие точечного заряда невозможно точно описать в принципе. Что касается саморазгоняющегося решения ЛАД, упомянутого в [2], которое Дирак рассматривал в [1], то эта патология исключается физически естественным условием нулевого ускорения при $\tau = \pm\infty$. В общем, существование нефизических решений физических уравнений не является ни новым ни редким фактом. Более того, большинство решений любого дифференциального уравнения удовлетворяют нефизическим начальным или граничным условиям.

Через множество статей, начиная с [2], автор СОУ настойчиво убеждает в том, что его уравнения, в отличие от ЛАД, точно соответствуют законам сохранения энергии-импульса. В следующем отрывке из [8] автор также критикует ЛЛ за нарушения законов сохранения «*Насколько теоретически важным является различие между этими двумя подходами? Мы обсуждали этот вопрос в [3, 19] и отметили, что уравнение ЛЛ не сохраняет ни обобщенный импульс электрона, ни полную энергию-импульс системы, состоящей из излучающего электрона, внешнего поля и излучения.*»

Но условие (P), само по себе, не влечет никакого сохранения. Это тривиальным образом видно при рассмотрении любой неконсервативной, механической системы, в которой некоторое (не Лоренцево) трение не учтено в уравнениях динамики. Автор СОУ не представил ни строгих доказательств ни численных оценок того, что в его случае эти законы справедливы, если не принимать во внимание смутные и загадочные рассуждения вроде следующего §11 [2]. «*Выбирая определенную калибровку (чисто скалярный или чисто векторный потенциал), легко проследить сохранение не только энергии, но и обобщенного импульса.*»

Какой смысл в варьировании калибровки тривиального поля, которое рассматривается в конце §2 ? Поскольку имеет место $p_x + p_{x,rad} = Eet$ и $\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_{rad} = Eex$, то возникает впечатление, что закон сохранения энергии-импульса справедлив для этого аналитического решения. Но здесь мы имеем импульс и работу не той силы, которую И.В. Соколов называет силой Лоренца и обозначает $\mathbf{f}_L$. Следовательно, сохранения энергии-импульса не имеет места в рамках модели СОУ.

1-е уравнение (2), которое справедливо для любых выражений $x^i_{rad}(t)$ и $p^i_{rad}(t)$ означает, что

$$\frac{d(p^i + p^i_{rad})}{dt} = \frac{e}{c} F^{ij} \frac{dx_j}{dt}$$

Отсюда следует, что для любого t имеет место:

$$\mathbf{p} + \mathbf{p}_{rad} = \int_0^t \mathbf{f}(t')dt', \qquad \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_{rad} = e \int_0^t \mathbf{E}(t') \cdot \mathbf{v}(t')dt'$$

где $\mathbf{f}$ является 3-силой Лоренца. Эти уравнения выражают сохранение энергии-импульса независимо от того, как именно моделируются радиационные потери p^i_{rad}. Следовательно, уравнение ЛАД было необоснованно обвинено в нарушении законов сохранения. Обратите внимание, что, в отличие от СОУ, в ЛАД и ЛЛ используется стандартное выражение (0) для силы Лоренца.

§ 4. Сверхсветовые парадоксы

Стоит отметить следующее замечание в §3.4 [13], относящиеся к СОУ : «*Тогда понятие собственного времени разрушается и мы получаем, что массивная частица должна двигаться со скоростью света (или быстрее!).*» В данном параграфе рассматриваются основания для этого утверждения. Они вытекают из следующего неравенства, которое может быть строгим:

$$\dot{x}^2 = \dot{x}^i \dot{x}_i = c^2 + \frac{\tau_0^2}{m^2} f_L^2 \le c^2 \tag{17}$$

Последствия нарушения условия (V) отнюдь не ограничены тем, что, как написано в §10 [2], электрон не движется в направлении своего импульса. Последнее также имеет место в случае ЛАД.

В соответствии с (15) относительное значение ε' отклонения (17) имеет порядок $\tau_0^2 |f_L^2|/(m^2c^2) \sim 10^{-13} \cdot (eE\gamma)^2$. Поскольку $|eE| \ll 10^4$ то $\varepsilon' \ll 0.001\gamma^2$ %. Очевидно, что в ультрарелятивистском случае может быть $\varepsilon' \gg \varepsilon$ (см. §3). Такое балансирование на «релятивистском крае» выглядит более опасным, чем отклонения (14) из-за бесконечно возрастающей энергии-импульса вблизи сингулярности $v = c$.

В §10 [2] автор утверждает, что сверхсветовые парадоксы в любом случае исключены в его модели. Это мнение основано на неравенстве

$$c^2(1-\alpha^2) < \dot{x}^2 \leq c^2$$

где $\alpha \approx 1/137$ — постоянная тонкой структуры.

Отметим, что поскольку $\dot{x}^i \dot{x}_i = (dt/d\tau)^2 \cdot (c^2 - v^2)$, то $\dot{x}^2 > 0$ эквивалентно $v < c$. В случае СОУ неравенство $\dot{x}^2 > c^2(1-\alpha^2)$ непосредственно следует из (15) и (17) при условии $f_L^2 \leq 0$, которое верно, хотя и не доказано автором. Таким образом, условие (15) является основанием для утверждения, что в рамках модели Соколова неравенство $v < c$ справедливо для всех t. Отметим, что

$$\dot{x}^2 > c^2(1-\alpha^2) \quad \Rightarrow \quad v < c \cdot \sqrt{1 - \frac{1-\alpha^2}{\widetilde{\gamma}^2}} \quad \text{где} \quad \widetilde{\gamma} = \frac{dt}{d\tau} \neq \gamma$$

и квадратный корень стремится к 1 при $v \to c$. Это означает следующее. Чем ближе скорость электрона к скорости света, тем больше может быть эта скорость, не нарушая пределов применимости классического подхода. Абсурдность этой интерпретации является убедительным свидетельством того, что уравнения СОУ физически необоснованны. По-видимому, именно это странное свойство породило миф о том, что СОУ могут быть взяты за основу при моделировании КЭД - режимов.

Критерий (15) является Лоренц-инвариантной формой условия $|\mathbf{f}| \ll 10^4$. Последнее означает, что расстояние, проходимое при разгоне до энергии $\mathcal{E} \sim \mathcal{E}_0$, на много порядков больше, чем Комптоновская длина волны электрона. В случае лазерного поля, рассмотренного в §3, это приводит к $eE\gamma \ll 10^4$. Но при применении (15), когда $\gamma \gg 1$, могут быть получены сомнительные результаты. Например, в лазерном поле с интенсивностью $E \sim 10^9$, которое соответствует потоку энергии $\sim 10^{20}\ W/cm^2$, мы имели бы $\gamma \ll 10^4$ и $\mathcal{E} \ll 10$ Гэв. Таким образом, электрон с энергией ~ 1 Гэв в таком поле не может быть надежно смоделирован классическим образом, даже если рассматривается только поступательное движение.

Еще более сомнительный вывод из (15) получается для поля $\sim 10^{24}\ W/cm^2$, которое ожидается в ближайшее время [9]. Здесь только электрон с $\mathcal{E} \ll 100$ Мэв может быть классически описан. По-видимому, следует весьма осторожно использовать критерий (15) в ультрарелятивистском случае. Кроме того, он несовместим с утверждением, что СОУ наиболее адекватна случаю сверхсильных лазерных полей.

Важно также отметить, что из (15) и (17) следует более сильное неравенство $c^2(1-\alpha^2) \ll \dot{x}^2$, которое не совместимо с $\dot{x}^2 \leq c^2$. Это — еще одно свидетельство физической абсурдности СОУ. Легко проверить, что если параметр τ представляет собственное время, то неравенство $\dot{x}^2 > c^2(1-\alpha^2)$ эквивалентно $v < c$ для всех $\alpha \neq 0$. Таким образом, автор СОУ фактически постулировал, что $v < c$, отказываясь рассматривать решения СОУ, нарушающие этот фундаментальный предел. Тем не менее, в рамках его модели сверхсветовые парадоксы все же возникают.

Вернемся к электрону в плоской волне, рассмотренному в §3. Следует отметить, что в рамках модели Соколова уравнения $p^1 = mc\gamma$ и $(p^2, p^3, p^4) = m\mathbf{v}\gamma$ являются недействительными, в противном случае мы имели бы тождество (V). Поэтому сейчас мы рассматриваем γ просто как такой множитель, что $\mathcal{E} = mc^2\gamma$.

Пусть интенсивность $E = 2{\cdot}10^{11}$. Это соответствует потоку энергии $\sim 10^{24}\ W/cm^2$ в лазерном импульсе. Предположим, что $p_z \sim mc$. Тогда, согласно (16) и (17), имеем $\dot{x}^i\dot{x}_i = 0$ для некоторого значения $\gamma^2 \approx 2.1 \cdot 10^{11}$. Следовательно, электрон с энергией $\mathcal{E} \approx 230$ Гэв под действием этой волны может достигнуть скорости света. Такая ситуация осуществима в Бэватроне. Если ось y направлена вдоль оси ускорителя и лазерный импульс перпендикулярен к ней, то можно получить электрон, который движется быстрее света! В стандартной физике уравнение $\gamma^2 = 2.1{\cdot}10^{11}$ соответствует скорости $v \approx 0.9999999999977c$.

Чтобы исключить сверхсветовые парадоксы из модели СОУ было выдвинуто следующее утверждение. Представленный выше пример нарушает предел Швингера вследствие эффекта Доплера в сопутствующем системе отсчета. Но этот аргумент противоречит заявленной области применимости СОУ. Действительно, в работе [4] автор пишет следующее. «*Ковариантное условие того, чтобы реакция излучения была существенной, выглядит следующим образом: (1)*» (формула) «*Высокое значение интеграла в формуле (1) может быть достигнуто, в принципе, только за счет более высокой интенсивности, $\sim 10^{25}\ W/cm^2$. В ходе реализации проекта ELI ожидается лазер, ... так что эффекты излучения будет доминировать ... Эти уравнения*» (СОУ) «*могут быть применены к электронам плазмы с целью моделирования лазерно-плазменных взаимодействий при высокой интенсивности лазерного поля.*»

Модель СОУ объявляется частью исследований, связанных с лазерами экстремальной плотности энергии. В заключение к [4]: «*Это исследование находится в основном потоке ELI и Hiper проектов*». Таким образом, только в случае потоков энергии $\sim 10^{25}\ W/cm^2$ и выше реакция излучения становится значительной и СОУ, по мнению автора, применима для моделирования динамики электронов в таких полях.

Заметим, что в примере сверхсветового движения мы имели поток $\sim 10^{24}\ W/cm^2$.

Существует еще один аргумент в пользу СОУ. А именно, в случае КЭД - сильного поля эта модель должна использоваться с $I = I_{QED}$ вместо $I = I_E$. Тогда, используя 2-е уравнение (6):

$$\dot{x}^2 = \dot{x}^i \dot{x}_i = c^2 + \frac{\tau_0^2}{m^2} \frac{I_{QED}^2}{I_E^2} f_L^2$$

Согласно [5] $I_{QED}/I_{cl} \sim \chi^{-4/3}$ (страница 6). Следовательно, сверхсветовые парадоксы исключаются неравенством $I = I_{QED} < I_E = I_{cl}$ где $\chi \gg 1$. Здесь значение $\dot{x}^2$ становится ближе к c^2 чем в (17) для того же поля, и, следовательно, неравенство $c^2 - v^2 > 0$ гарантировано.

Пояснение: параметр χ оценивает отношение E_0/E_S, где E_0 есть напряженность поля в сопутствующей системе отсчета (CMF) и E_S есть предел Швингера (4) [5]. Если $\chi \ll 1$ или $\chi \gg 1$, то КЭД - эффекты незаметны или преобладают соответственно.

Этот аргумент является вымышленным, так как величина I_{QED}, которая формально введена в (28), на самом деле не имеет смысла (см. §5). Даже если поверить в существование этой величины, назначая некоторое малое значение символу $d\tau$, то I_{QED} становится нечетким (fuzzy) значением, определенным с точностью до пропорциональности (для различных $d\tau$). Следовательно, отношение I_{QED}/I_E не может быть использовано при оценке скорости электрона.

Кроме того, гладкая модель, которая подразумевается при расчете скорости электрона как $\dot{x}^i$, противоречит попытке адаптации уравнений СОУ к дискретной парадигме квантовой механики. На странице 7 [5] излучение фотона изображается следующим образом. «*Движение электронов в сильном поле можно рассматривать, как последовательность коротких интервалов. На каждом из этих интервалов электрон следует фрагменту классической траектории ... Переход с одного куска классической траектории на другой, или, что то же самое, от одного состояния электрона к другому происходит случайным образом.*»

Согласно этой картине при испускании фотона, то есть, когда величина I_{QED} становится необходимой, выражение $\dot{x}^i$ теряет смысл. Дело в том, что концы интервала времени $\Delta\tau \to 0$ могут относиться к различным гладким кускам мировых линий. Если момент времени $\widetilde{\tau}$ разделяет два таких фрагмента, то предел $\lim_{\Delta\tau\to 0} \Delta x^i/\Delta\tau$ не существует и $\dot{x}^i(\tau - 0) \neq \dot{x}^i(\tau + 0)$.

Подводя итог §§3, 4: утверждения о том, что система СОУ является более строгой по сравнению с ЛАД, являются полностью необоснованными. Это притязание выглядит странно, учитывая, что СОУ получено исключительно из условия (P), наложенного на систему (2) (см. §2). Подход Дирака был несравнимо более строгим и глубоким. Он основан на предположении, что поток энергии-импульса через границу любой бесконечно тонкой 4-мерной трубки, охватывающей мировую линию электрона, определяется только значениями энергии-импульса на концах трубки [1]. Эта идея содержит гораздо больше физики, чем элементарное условие (P).

§ 5. Квантовомеханические приложения

В работе [9] уравнения СОУ представлены, как единственный рекомендуемый метод для описания динамики излучающего электрона (§1.1.3 [9]). Стоит отметить следующее утверждение из §1.3 [9]: «*В частности, излучение более мягких γ фотонов может быть описано в приближении радиационной силы, которое традиционно используется для учета реакции излучения*». Весьма удивительным является то, что подход Соколова, представленный в 2009 году [2], уже стал традиционным.

В §1.1.4 [9] уравнения (8) в 3-мерном виде (21 - 23) [2] были использованы для описания излучения фотона водородоподобным атомом. За основу было взято разностное уравнение:

$$\Delta(\mathcal{E} + e\varphi) = \omega \Delta M \quad (= -\hbar\omega) \tag{18}$$

которое отвечает излучению фотона. Здесь классическое выражение $\mathcal{E} + e\varphi$ энергии водородоподобного атома используется для значения $-R_y/n^2$, предсказанного ранней теорией Бора. В соответствии с §1.1.4 [9] имеют место следующие уравнения:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u} + \bar{\mathbf{u}} \qquad \bar{\mathbf{u}} = \frac{d\mathbf{x}_{rad}}{dt} = \frac{\tau_0}{m_e}\mathbf{f}_{Le} \qquad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}_{Le} - \frac{d\mathbf{p}_{rad}}{dt}$$

$$\frac{d\mathbf{p}_{rad}}{dt} = \frac{\mathcal{E}^2(\bar{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{f}_{Le})}{m_e^2c^6}\mathbf{u} \qquad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = (\bar{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{f}_{Le}) - \frac{d\mathcal{E}_{rad}}{dt} \qquad \frac{d\mathcal{E}_{rad}}{dt} = \frac{\mathcal{E}^2(\bar{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{f}_{Le})}{m_e^2c^4} \tag{19}$$

Здесь $\mathbf{p} = \gamma m_e\mathbf{u}$ и $\mathbf{u} = [\vec{\omega} \times \mathbf{r}]$, где $\vec{\omega}$ — угловая скорость электрона (в классическом смысле), $\mathbf{f}_{Le} = [\vec{\omega} \times \mathbf{p}]/\gamma$ и $f_{Le} = Ze^2/r^2$.

В соответствии с этой наивной моделью процесс выглядит следующим образом. Как только равномерно вращающийся электрон начал излучать фотон, его скорость мгновенно приобрела ортогональную компоненту $\bar{\mathbf{u}}$, направленную к ядру. После того, как излучение фотона завершено, электрон мгновенно поворачивается и дальше движется по круговой орбите с меньшим радиусом. Несмотря на то, что гладкие уравнения (19) не подходят для такой разрывной модели, автор решительно заменяет производные отношениями конечных разностей и обратно. Были получены следующие соотношения:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} \approx \left(\frac{\Delta\mathbf{M}}{\Delta t}\right)_{rad} = \left[\left(\frac{\Delta\mathbf{x}}{\Delta t}\right)_{rad} \times \mathbf{p}\right] + \left[\mathbf{r} \times \left(\frac{\Delta\mathbf{x}}{\Delta t}\right)_{rad}\right] \approx$$

$$\approx [\bar{\mathbf{u}} \times \mathbf{p}] - [\mathbf{r} \times \mathbf{u}]\frac{\gamma^2(\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{f}_{Le})}{c^2} = -\frac{\gamma^2(\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{f}_{Le})}{\omega^2}\vec{\omega} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{M}}{dt} \approx -\frac{\gamma^2(\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{f}_{Le})}{\omega^2}\vec{\omega} \tag{20}$$

$$\frac{d(\mathcal{E} + e\varphi)}{dt} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} + \nabla(e\varphi) \cdot \bar{\mathbf{u}} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} + (-\mathbf{f}_{Le}) \cdot \bar{\mathbf{u}} = -\gamma^2(\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{f}_{Le}) \approx \omega\frac{dM}{dt} \approx \frac{d(\mathcal{E} + e\varphi)}{dt} \tag{21}$$

Сходство между (18) и (21), по мнению автора, является глубоким физическим аргументом в пользу СОУ. Но эта аналогия является весьма поверхностной, потому что ω для квази-вращения электрона и ω для излучаемого фотона — это принципиально разные величины (для атома водорода они могут отличаться друг от друга на порядок величины).

Более того, строгое равенство во 2-й строке (20) содержит ошибку. Действительно, после подстановки значения $\gamma m_e \mathbf{u}$ вместо $\mathbf{p}$ это равенство перестает быть верным, если $\gamma \neq 1$. Но предположение $\gamma \approx 1$ не соответствует заявленной области применимости для СОУ.

В §1.1.4 [9] были использованы уравнения (19) в предположении, что функции $\mathbf{x}_{rad}(t)$ и $-\mathbf{p}_{rad}(t)$ являются поправками к «невозмущенному движению» $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{p}(t)$, которое представляет собой равномерное вращение электрона вокруг ядра. Используя этот наивный подход, точно такой же результат можно получить с помощью ЛАД. В самом деле, если $p^i = m\dot{x}^i$ и x^i является решением (0), то (4) совпадает с (8). Повторяя вычисления из §1.1.4 [9] при тех же предположениях, но с использованием (4) вместо (8) можно получить:

$$\frac{d\mathbf{p}_{rad}}{dt} = \frac{\tau_0\gamma^2|\mathbf{f}_{Le}|^2}{mc^2}\mathbf{u} \qquad \frac{d\mathcal{E}_{rad}}{dt} = \frac{\tau_0\gamma^2|\mathbf{f}_{Le}|^2}{m} \qquad \frac{d\mathbf{x}_{rad}}{dt} = \frac{\tau_0}{m}\mathbf{f}_{Le} \qquad \frac{d\gamma}{dt} = 0 \tag{22}$$

Как легко проверить, уравнения (22) совпадают с (19). Последнее приближение в (21) также справедливо, если $\gamma \approx 1$ или если в (20) была сделана ошибка $\mathbf{p} = m_e\mathbf{u}$.

Таким образом, §1.1.4 [9] основывается на математических и физических ошибках. Среди них последнее уравнение (22). Очевидно, что оно несовместимо с этой моделью, которая, сама по себе, выглядит слишком наивной и надуманной. Безотносительно ко всем этим проблемам, полученная из СОУ модель также может быть получена из ЛАД.

Модель Соколова активно продвигают, как перспективную в отношении применения в КЭД - режимах, когда электрон движется в таком сильном поле, что эффекты КЭД являются существенными. Статья [5] создает впечатление, что это оценочное суждение вполне обоснованно. Согласно аннотации: «*Радиационная сила, которую испытывает электрон, впервые получена из принципов КЭД и диапазон его* (СОУ) *применимости расширен в сторону КЭД - сильных полей*».

Авторы [5] использовали систему единиц, в которой $\hbar = m_e = c = 1$, смешивая ее с обозначениями на основе СГС. В дальнейшем используется только СГС. Уравнения (40), (41) [5] непосредственно связаны с СОУ. Уравнение (41) [5] совпадает с (7), а его последние два члена представляют собой реакцию излучения. Последняя формально идентична (40) [5]. Данный факт является главным основанием для утверждений о применимости модели СОУ в КЭД. Ниже показано, что это совпадение было получено из ошибок и неточных рассуждений, которые были подогнаны под желаемый результат.

В работе [5] рассматривается электрон с энергией-импульсом p под действием плоской волны с волновым 4-вектором $k = \omega/c \cdot (1, -\mathbf{e}_x)$. Проанализируем заключительную часть статьи [5], начиная с (39) [5]. Оно было получено из уравнения

$$\frac{dp_{rad}}{d\tau} = \hbar \int k' \frac{dW}{d\tau d^3\mathbf{k}'} d^3\mathbf{k}' \tag{23}$$

где $\mathbf{k}'$ есть волновой 3-вектор излучаемого фотона и $dW/d\tau d^3\mathbf{k}'$ — вероятность этого излучения на единицу времени и единицу объема в пространстве волновых векторов. Уравнение (23) выглядит вполне разумно, если не обращать внимание на скрытый трюк, который обсуждается ниже. Верхняя строка в (39), [5]

$$\frac{dp_{rad}}{d\tau} = \frac{\hbar}{m} \int k' \frac{(k \cdot p) dW}{d(k \cdot k') d^2\mathbf{k}'_\perp d\xi} d(k \cdot k') d^2\mathbf{k}'_\perp \tag{24}$$

непосредственно следует из (23) с использованием формулы на странице 9

$$d^3\mathbf{k}' = \frac{\omega' d^2\mathbf{k}'_\perp d(k \cdot k')}{c(k \cdot k')} \tag{25}$$

и тождества (9) [5] для безразмерной переменной $\xi = (k \cdot x)$, определенной вдоль мировой линии электрона:

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{(k \cdot p)}{m} \frac{d}{d\xi} \tag{26}$$

Вектор $\mathbf{k}'_\perp$ ортогонален $\mathbf{e}_x$. Правая часть (25) равна $d^2\mathbf{k}'_\perp \omega' dn'_x/(c(1 + n'_x))$, где n'_x есть x - проекция вектора $\mathbf{n}' = \mathbf{k}'/|\mathbf{k}'|$. Отсюда ясно, что (25) справедливо только тогда, когда $n'_x = 0$, т.е., если имеет место следующее:

$$(k \cdot k') = \frac{\omega}{c} \frac{\omega'}{c} \tag{27}$$

Но так как (27) не имеет места для почти всех фотонов, то формулы (25) и (24) = (39) [5] неверны.

В (23) и (24) используется трюк, аналогичный тому, который мы видели в (13). Эти формулы не имеют смысла из-за того, что подинтегральные выражения содержат бесконечно большие множители, например $dW/d\tau d^3\mathbf{k}'$. Трюк заключается в интерпретации, согласно которой в выражении $dW/d\tau d^3\mathbf{k}'$ символы $d\tau$ и $d^3\mathbf{k}' = dk'_x dk'_y dk'_z$ не подразумевают производные по τ, k'_x, k'_y, k'_z, а играют ту роль, которая объясняется ниже уравнения (23).

Такая интерпретация выглядит физически естественно, но она имеет математическое последствие. А именно, для некоторой функции $\mathcal{W}$ должно быть:

$$\frac{dW}{d\tau d^3\mathbf{k}'} = \frac{\partial^4 \mathcal{W}}{\partial\tau \partial k'_x \partial k'_y \partial k'_z}$$

Невозможно физически интерпретировать «вероятность» $\mathcal{W}$. Более драматично, что из интеграла (23) следует $\mathbf{p}_{rad} = const$. Действительно, при интегрировании (23) по частям при $(k')^i \in \{k'_x, k'_y, k'_z\}$ получается ноль из-за того очевидного факта, что $\mathcal{W} = 0$ если имеет место хотя бы один из случаев $k'_x = \pm\infty$, $k'_y = \pm\infty$, $k'_z = \pm\infty$ (в пределе). То же самое следует из уравнения (24).

Нижняя строка в (39) [5] была получена (стр. 11 [5]), используя параметр

$$r_0 = \frac{\hbar(k \cdot k')}{\chi(k \cdot p)}$$

Непонятно, почему автор пренебрег слагаемым $kO((k\cdot p)^{-1})$ в квадратных скобках. В системе единиц, которая используется в работе [5], это значение может иметь порядок величины $p \sim 1$, если уравнение (39) [5] рассматривается в CMF в фиксированный момент времени.

Таким образом, уравнение (39) [5] не выдерживает критики. Утверждение чуть выше (39) [5] о том, что оно получается из формул (30) и (38) [5], выглядит весьма сомнительным. Очевидно, что (38) [5] не имеет никакого отношения к выводу (39) [5]. Чтобы раскрыть другие ошибки, в дальнейшем мы будем считать, что это уравнение верно и 2-е слагаемое в квадратных скобках равно нулю.

Следующие уравнения приведены ниже (39) [5]:

$$\frac{dp_{rad}}{d\tau} = \frac{p}{mc^2}\int \frac{dI_{QED}}{dr_0} dr_0 \qquad I_{QED} = \hbar c^2 \int (k\cdot k')\frac{dW}{d\xi dr_0} dr_0 \tag{28}$$

Ниже уравнений (28) автор пишет: «*энергетический спектр фотона, dI_{QED}/dr_0, описывается, как функция только случайного скаляра r_0, используя единственный параметр χ*». Переводя на математический язык следует сделать вывод, что

$I_{QED} = I_{QED}(r_0)$ и уравнение

$$\frac{dp_{rad}}{d\tau} = \frac{I_{QED}}{mc^2}p \tag{29}$$

не вытекает из 1-го уравнения (28).

Действительно, этот интеграл равен $I_{QED}(r_{0,max}) - I_{QED}(r_{0,min})$. Он должен быть равен нулю, так как $I_{QED}(r) = 0$ при $r_0 > r_{0,max}$ или $r_0 < r_{0,min}$. Эта путаница возникла из-за попыток использовать «спектры», игнорируя их математическую природу (см. выше).

Но возникает впечатление, что (29) получается из (39) [5] и 2-го уравнения (28). Последнее было получено из 1-го уравнения (6) и (13) при условии $I = I_{QED}$. Но (13) и 2-е уравнение (28) отличаются даже в формальном смысле. В самом деле, из (26) и 2-го уравнения (28) можно формально получить:

$$I_{QED} = mc^2\chi\, r_0 \frac{W}{d\tau}\bigg|_{r_{0,min}}^{r_{0,max}} - \hbar c^2 \int \frac{W}{d\xi} d(k \cdot k') = mc^2\chi\, r_0 \frac{W}{d\tau}\bigg|_{r_{0,min}}^{r_{0,max}} - mc^2\chi \int \frac{W}{d\tau} dr_0 \tag{30}$$

Легко аналогично вывести из (13):

$$I = \hbar\omega_1 \frac{W}{d\tau}\bigg|_{\omega_{1,min}}^{\omega_{1,max}} - \hbar \int \frac{W}{d\tau} d\omega_1 \tag{31}$$

Правые части (30) и (31) формально равны, только если имеет место (27). Но равенство (27) почти всегда не соответствует действительности. Следовательно, 2-е уравнение (28) не могло быть получено формально. Анализируя другие ошибки давайте игнорировать тот факт, что (29) ложно.

Согласно [5], при испускании фотона электрон приобретает от поля энергию-импульс:

$$dp_F^i = \frac{(k' \cdot p)}{(k \cdot p) - \hbar(k \cdot k')} \hbar k^i \tag{32}$$

(стр. 12 [5]). Заметим, что это уравнение противоречит (3) [3], где $\hbar(k \cdot k')$ отсутствует.

При переходе от (39) [5] к уравнению (40) [5] автор пренебрег значением $\hbar(k \cdot k')$ в (32) (сразу над (40) [5]). Таким образом, было получено уравнение (12). Оставляя без внимания на тот факт, что (12) ложно (§3), это «приближение» стоит обсудить, как таковое. На странице 12 оно характеризуется, как очень удобное. Но удобство в получении желаемого результата не является основанием для признания вывода правильным.

Этот грубый подход подразумевает, что $\hbar(k \cdot k')/(k \cdot p) \approx 0$ и, следовательно, энергия-импульс излучаемого фотона пренебрежимо малы по сравнению с электроном. Это противоречит заявленной применимости СОУ вблизи КЭД – режимов. Кроме того, параметр r_0 считается пренебрежимо малым, что несовместимо с (28).

Затем автор определил радиационную силу, как $(dp_F - dp_{rad})/d\tau$ (стр. 12), хотя эта сила должна быть равна $(-dp_{rad})/d\tau$. Вообще говоря, в процессе излучения электрон не тратит всю энергию-импульс dp_F и, таким образом, он ускоряется. Покидая эти грубые ошибки, проследуем за работой [5] дальше.

С помощью 2-го уравнения (28) вместе с (26) и (27) можно формально получить:

$$\int \frac{(p\cdot k')}{(p\cdot k)}\hbar k \frac{dW}{d\tau d(k\cdot k')} d(k\cdot k') = \frac{(p\cdot p)}{(p\cdot k)} k \cdot \frac{I_{QED}}{mc^2} \tag{33}$$

Здесь мы сделали ровно то, о чем автор написал: «*Полная сила излучения теперь может быть найдена путем интегрирования dp_F по $d(k\cdot k')$*» (сразу над (40) [5]). Уравнение (40) [5] мгновенно следует из (29) и (33), но (29) неверно, а (27) не выполняется для почти всех волновых векторов k', которые может иметь излученный фотон.

Кроме того, трюк с использованием скаляра r_0 вместо 4-вектора k' при рассмотрении спектра $dW/d\xi dr_0$ (28) имеет следующую подоплеку. Автор предполагает, что вероятность излучения в направлении k' зависит только от значения $(k\cdot k')$. Легко показать, что это предположение является необоснованным. Например, пусть один фотон испускается под углом $\pi/3$ к направлению $\mathbf{k}$, а другой фотон направлен ортогонально $\mathbf{k}$. Если их волновые 4-векторы k' и k'', то в случае $(k'\cdot k) = (k''\cdot k)$ имеем $\omega' = 2\omega''$. Согласно [5], вероятности излучения этих фотонов равны. Очевидно, что данный вывод не имеет оснований в рамках квантовой механики.

Кроме того, что выражает отношение $d(p_f - p_i)/d\tau$ когда электрон излучает фотон и его энергия-импульс изменяется от p_i до p_f ? Здесь i и f обозначают «начальный» и «конечный». В любом случае, уравнение (40) [5] приводит к физически абсурдным выводам. Например, если электрон движется в направлении $\mathbf{n}$ распространения волны, то

$$\frac{(p_i\cdot p_i)}{(k\cdot p_i)}k - p_i = \big(|\mathbf{p}|, \mathcal{E}\mathbf{n}/c\big) \qquad \frac{d(\mathcal{E}_f - \mathcal{E}_i)}{d\tau} = c|\mathbf{p}| \qquad \frac{d(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)}{d\tau} = \frac{\mathcal{E}}{c}\mathbf{n}$$

Не обращая внимания на бессмысленность левой части последнего уравнения, его правая часть означает, что радиационная сила ускоряет электрон независимо от направления, в котором излучается фотон! Эта нелепость ясно демонстрирует физическую несостоятельность формулы (40) [5].

Кроме того, значение I_{QED} в (41) [5] не было получено строго, но *назначено* в качестве значения для нечеткой величины I (7). Таким образом, все рассуждения из [5], связанные с СОУ, не выдерживают критики. Вся эта путаница возникла из-за попытки описать квантовые эффекты с помощью чисто классической модели СОУ.

§ 6. Заключение

В ходе анализа, представленного в данной статье, не было найдено никаких объективных оснований для утверждений о том, что уравнения СОУ являются более строгими, чем ЛАД и более подходящими в случае сверхсильных полей. Такое мнение было сформировано самим автором путем активной рекламы преимуществ его уравнений, как если бы они были надежно подтверждены. Но эксперименты, подтверждающие эти притязания, не проводились. Кроме того, не были представлены ни строгие доказательства ни численные оценки, которые бы показали, что СОУ, по крайней мере, столь же адекватны, как ЛАД.

На самом деле, СОУ представляет собой не модификацию, а искажение ЛАД. Действуя аналогичным образом можно получить бесконечное число уравнений для той же физической задачи, каждое из которых экспериментально не подтверждено и не было строго выведено из недвусмысленных предположений. Два примера такого рода представлены в §2. Один из них похож на СОУ, но выглядит более физически адекватным (11).

Нарушение условия $p^i p_i = m^2 c^2$ в рамках ЛАД незначительно из-за относительной погрешности $\varepsilon \ll 0.1\%$ (§3). При этом модель Соколова (СОУ) нарушает тождество $\dot{x}^i \dot{x}_i = c^2$, что может привести к драматическим последствиям. Среди них сверхсветовых парадоксы. Пример такого решения СОУ приведен в §4. Вопреки тому, что автор утверждает в многочисленных статьях, сохранение энергии-импульса имеет место в случае ЛАД и, напротив, не выполняется в рамках СОУ (§ 3). Таким образом, не существует никаких преимуществ СОУ перед ЛАД.

Широко распространенное мнение о том, что модель СОУ особенно подходит для использования в КЭД – режимах также не обоснованно. Кроме того, соответствующие результаты крайне сомнительны из-за многочисленных ошибок различной природы (§5).

Сравнение статей [1] и [2] ясно показывает, что СОУ представляет собой результат чисто математических спекуляций без физических оснований. Конечно, эта модель имеет право рассматриваться среди других. Но в настоящее время не существует никаких оснований для признания уравнений Соколова в качестве глубокого и перспективного подхода, имеющего какие-либо преимущества по сравнению с ЛАД вопреки тому, что было написано об этом в многочисленных статьях.

Список литературы

[1] P.A.M. Dirac, Classical Theory of Radiating Electrons // Proc. Royal Soc. London, 167(929), 1938.

[2] И.В. Соколов, Перенормировка уравнения Лоренца-Абрагама-Дирака для радиционной силы в классической электродинамике // ЖЭТФ, 136 (2), 2009.

[3] I.V. Sokolov, N.M. Naumova, J.A. Nees, G.A. Mourou, V.P. Yanovsky, Dynamics of emitting electrons in strong laser fields // Physics of Plasmas, 16(9), 2009.

[4] N.M. Naumova, I.V. Sokolov, V.T. Tikhonchuk, T. Schlegel, John A. Nees, C. Labaune, Victor P. Yanovsky, Gerard A. Mourou, The radiaton reaction effect on electrons at super-high laser intensities with application to ion acceleration // AIP Conference Proceedings, 1153, 2009.

[5] I.V. Sokolov, J.A. Nees, V.P. Yanovsky, N.M. Naumova, G.A. Mourou, Emission and its back-reaction accompanying electron motion in relativistically strong and QED-strong pulsed laser fields // Physical Review E - Statistical, Nonlinear and Soft Matter Physics, 81(3), 2010.

[6] I.V. Sokolov, J.A. Nees, N.M. Naumova , G.A. Mourou, Pair Creation in QED-Strong Pulsed Laser Fields Interacting with Electron Beams // Physical Review Letters, 105(19), 2010.

[7] I.V. Sokolov, N.M. Naumova J.A. Nees, V.P. Yanovsky, G.A. Mourou, Radiation back-reaction in relativistically strong and QED-strong pulsed laser fields // AIP Conference Proceedings, 1228, 2010.

[8] I.V. Sokolov, J.A. Nees, N.M. Naumova, Numerical Modeling of Radiation-Dominated and QED-Strong Regimes of Laser-Plasma Interaction // Physics of Plasmas, 18(9), 2011.

[9] I.V. Sokolov, G.A. Mourou, M.M. Naumova, Effect of radiation reaction on particle motion and production in IZEST-strong fields // European Physical Journal: Special Topics, 223(6), 2014.

[10] N.M. Naumova , I.V. Sokolov, J.A. Nees, G.A. Mourou, Radiation back-reaction and pair creation in the interaction of QED-strong laser fields with electron beams// Proceedings of SPIE, 7994, 2010.

[11] K. Seto, H. Nagatomo, J. Koga, K. Mima, Radiation reaction in ultrarelativistic laser–spinning electron interactions // Progress of Theoretical and Experimental Physics, 5, 2013.

[12] N. Neitz, N. Kumar, F. Mackenroth, K.Z. Hatsagortsyan, C.H. Keitel, A. Di PiazzaNovel Aspects of radiation reaction in the classical and the quantum regime // Journal of Physics: Conference Series, 497, 2014.

[13] D.A. Burton, A. Noble, Aspects of electromagnetic radiation reaction in strong fields // Contemporary Physics, 55(1), 2014.

[14] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Классическая теория поля*, "Физматгиз 1960.