О законе сохранения момента импульса при взаимодействии волны с зарядами: критические замечания на одну статью в УФН

д.ф.-м.н. Зотьев Д.Б.

Аннотация

В статье [1] утверждается, что диполь, вращающийся под действием эллиптически поляризованной волны, излучает поле с угловым моментом, равным по модулю и обратным по знаку моменту импульса диполя. Одновременно отрицается факт передачи момента от волны диполю. На этом основании автор предлагает новое объяснение механизма передачи углового момента от волны пластинке или в плазму, трактуя его, как поверхностный эффект. В настоящей статье показано, что в [1] неверно вычисляется поток момента импульса волны, взаимодействующей с зарядами. Поэтому предложенные объяснения эффекта Садовского являются надуманными и неверными.

Автор [1] предложил новое теоретическое объяснение эффекта передачи углового момента от эллиптически поляризованной волны к заряженной частице или системе точечных зарядов — диполю с моментом $\mathbf{d}$. Как сказано в §6, при взаимодействии с электромагнитной волной ему «может передаваться момент импульса, но этот момент не черпается из падающей на диполь плоской волны». Для обоснования в §3 приводится верное утверждение о том, что поток момента импульса в направлении вектора $\mathbf{k}$ равен нулю в плоской волне ($g_{xx} = 0$). При этом, как сказано в §1: «закон сохранения в действительности выполнен за счет выноса противоположного по знаку момента в дифрагировавшей на теле волне, которая не является плоской». Данное утверждение неверно в том смысле, который придается ему в [1]. Согласно (25) [1] и сказанному в §7, излученная или поглощенная диполем волна уносит с собой или отдает угловой момент, который приобретает или теряет диполь. Таким образом, автор отрицает факт получения зарядом момента от плоской волны, которая приводит его во вращение. Эта ложная идея проходит через всю работу и приводит к новым объяснениям хорошо известных эффектов, связанных с именем Садовского.

Математическая и методическая ошибка [1] связана с потоком момента импульса волны $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(ikx - i\omega t)$ через область между плоскостями $x = \pm L$, где $L \to +\infty$ (§6). В начало координат помещен диполь $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \exp(-i\omega t)$, который вращается под действием этой волны ($\mathbf{d}_0 \perp \mathbf{e}_x$). Поскольку $g_{xx} = 0$, то, по мысли автора, в данную область не втекает и не вытекает момент импульса.

Однако, при вычислении «баланса» момента импульса необходимо учитывать его потоки через границы малых окрестностей зарядов, с которыми взаимодействует волна. Они равны нулю для квазистатического поля зарядов и поля волны, рассматриваемых по отдельности. Но тензор (11) [1] нелинейно зависит от полей, а напряженость поля заряда велика вблизи него, поэтому поток момента суперпозиции отличен от нуля. В последующих обозначениях индекс 0 относится к полю волны, а s — квазистатическому полю зарядов.

При отражении относительно центра бесконечно малой сферы напряженность поля заряда, расположенного в ее центре, меняет знак. Остальные компоненты $\mathbf{E}$, а также вектор $\mathbf{r}$ можно считать неизменными. При этом меняет знак та часть (11) [1], которая дает вклад в поток x – компоненты момента вдоль оси x, а именно числа $4\pi^{-1} \cdot [\mathbf{r}, \mathbf{E}]_x E_\gamma$ (в (11) [1] ошибка со знаком). Поэтому

$$\int \mathbf{g}_x d\mathbf{n} = \frac{1}{4\pi} \int [\mathbf{r}, \mathbf{E}]_x E_\gamma dn^\gamma \neq 0 \qquad (1)$$

Легко понять, что интеграл (1), вычисляемый по границе всех бесконечно малых сфер с центрами в зарядах, равен полной x – компоненте момента импульса, который эти заряды приобретают в единицу времени. Проверим это в случае одиночного заряда q. Поскольку (1) считается по границе бесконечно малой сферы, векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{E}_0$ можно считать постоянными. Используя теорему Гаусса из (1) получим:

$$\int \mathbf{g}_x d\mathbf{n} = \frac{1}{4\pi} [\mathbf{r}, \mathbf{E}_0]_x \int \mathbf{E}_s d\mathbf{n} + \frac{1}{4\pi} E_{0x} \int [\mathbf{r}, \mathbf{E}_s] d\mathbf{n} = [\mathbf{r}, q\mathbf{E}_0]_x, \qquad (2)$$

поскольку $[\mathbf{r}, \mathbf{E}_s] d\mathbf{n} = [\mathbf{E}_s, d\mathbf{n}]\mathbf{r} = 0$. В правой части (2) стоит момент силы, действующей на заряд со стороны плоской волны, что и требовалось доказать. При этом мы пренебрегли излучаемой волной, которая уносит относительно малый угловой момент (см. ниже).

Таким образом, поляризованная волна в направлении x все же передает x – компоненту углового момента каждой заряженной частице, которая вращается под действием этой волны. Немного странно, что пришлось формально опровергать отрицание столь очевидного факта.

Для объяснения того, откуда берется угловой момент диполя, в §6 автор пытался доказать, что излученная диполем волна уносит обратный по знаку момент. Для этого вычислялся интеграл (21) [1] с помощью метода стационарной фазы. Его применимость никак не обоснована, хотя она отнюдь не очевидна. Данный метод используется для вычисления интегралов $\int f(x)\exp(ig(x))dx$ при условии, что функция $f(x)$ меняется значительно медленней, чем $g(x)$. Интеграл (21) [1] имеет вид

$$\int dz \int \frac{Q_x(y,z)}{R^2}\exp\left(i(kx - k\sqrt{x^2+y^2+z^2})\right)dy, \tag{3}$$

где $Q_x(y,z)$ — билинейная форма относительно координат y, z вектора $\mathbf{R}_\perp$ при фиксированном $x = \pm R$. Подразумевается, что $R_\perp << R$ и вектор $\mathbf{R}$ параллелен оси x. Это видно из того, что при получении из (11)[1] подинтегрального выражения использовались равенства $[\mathbf{R}, \mathbf{E}_0]_x = [\mathbf{R}_\perp, \mathbf{E}_0]_x$ и $(\mathbf{R}, \mathbf{E}_0)_x = (\mathbf{R}_\perp, \mathbf{E}_0)_x$ (индексы x в правой части (21) [1] потеряны). Кроме того, множитель x в первом слагаемом под интегралом возникает в силу $\mathbf{R} = x\mathbf{e}_x$, т.к. больше ему взяться неоткуда. Очевидно, что в силу $\mathbf{R} = x\mathbf{e}_x$ в (22) [1] получается ноль при $x = -R$.

Таким образом, величину R^{-2} надлежит считать константой, в силу чего ее можно вынести за знак интеграла (3). Поэтому знаменатель R^2 не влияет на вопрос о применимости метода стационарной фазы. Тогда в повторном интеграле

$$const \cdot \int Q_x(y,z)\exp\left(i(kx - k\sqrt{x^2+y^2+z^2})\right)dy \tag{4}$$

условие применимости метода не выполняется, т.к.

$$\lim_{y\to\infty}\frac{Q_x(y,z)}{kx - k\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \infty \quad \text{или} \quad \lim_{z\to\infty}\frac{Q_x(y,z)}{kx - k\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \infty$$

в силу $[\mathbf{E}_0, \mathbf{d}_0^*] \neq 0$ (на диполь действует ненулевой момент (23) [1]).

Если проигнорировать указанное обстоятельство и применить метод стационарной фазы к интегралу (21) [1], то при $x = \pm L$ получится ноль. В самом деле, после «вычисления» интеграла (4) получим функцию от z, которая пропорциональна $Q_x(0,z)\exp(i(kx - k\sqrt{x^2+z^2}))$. Вторичное применение метода ведет к выражению $const \cdot Q_x(0,0)\exp(i(kx - k\sqrt{x^2})) = 0$.

Если же автор использовал полярные координаты и лемму Эрдейи (формула (1.14) на стр. 97 [2]), то ее применимость в данном случае весьма не очевидна. Тогда вычислялся бы повторный интеграл по r от 0 до некоторого r_0. Из каких соображений выбирался $r_0 > 0$? Если этот предел интегрирования каким-то образом был выбран, то какой сомножитель $f(r)$ подинтегрального выражения имеет нулевые производные *всех* порядков в точке r_0 ?

Есть также вопросы относительно формальных выкладок. Использованные при выводе (22) из (21) [1] соотношения

$$\mathrm{Re}\,([\mathbf{R}_\perp, \mathbf{E}_0] \cdot (\mathbf{R}_\perp, \mathbf{d}_0^*) - [\mathbf{R}_\perp, \mathbf{d}_0^*] \cdot (\mathbf{R}_\perp, \mathbf{E}_0)) = -\mathrm{Re}\,([\mathbf{d}_0, \mathbf{E}_0^*] \cdot \mathbf{R}_\perp^2)$$
$$\mathrm{Re}\,([\mathbf{R}_\perp, \mathbf{E}_0] \cdot (\mathbf{R}_\perp, \mathbf{d}_0^*) + [\mathbf{R}_\perp, \mathbf{d}_0^*] \cdot (\mathbf{R}_\perp, \mathbf{E}_0)) = 0$$

не могут быть одновременно верными, для почти всех взаимоположений векторов $\mathbf{R}_\perp$, $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{d}_0^*$ (в плоскости y, z). Это легко проверить в случае линейно-поляризованной волны, когда $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{d}_0 = \mathbf{d}_0^*$ являются вещественными. Тогда для различных конфигураций тройки $\mathbf{R}_\perp$, $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{d}_0^*$ может иметь место любое из соотношений

$$[\mathbf{R}_\perp, \mathbf{E}_0] \cdot (\mathbf{R}_\perp, \mathbf{d}_0^*) \pm [\mathbf{R}_\perp, \mathbf{d}_0^*] \cdot (\mathbf{R}_\perp, \mathbf{E}_0) = \pm[\mathbf{d}_0, \mathbf{E}_0^*] \cdot \mathbf{R}_\perp^2 \ ,$$

а равенство $[\mathbf{R}_\perp, \mathbf{E}_0] \cdot (\mathbf{R}_\perp, \mathbf{d}_0^*) + [\mathbf{R}_\perp, \mathbf{d}_0^*] \cdot (\mathbf{R}_\perp, \mathbf{E}_0) = 0$ справедливо только тогда, когда угол между векторами $\mathbf{R}_\perp$ и $\mathbf{d}_0^*$ равен углу между $\mathbf{R}_\perp$ и $\mathbf{E}_0$.

Складывается впечатление, что детальный расчет потока момента дифрагировавшей волны не проводился. По-видимому, автор был уверен в (22) [1] и не тратил время на математические выкладки. Если допустить, что момент дифрагировавшей волны целиком выносится через плоскость $x = L$, то, в силу закона сохранения момента, результат (22) [1] очевиден. Дифрагировавшая волна, которая перестала быть плоской, уносит собой момент, равный по модулю и обратный по знаку моменту, который «ушел в заряды» через их малые окрестности. Который, в свою очередь, передался диполю. Однако, поток момента не может «течь» только через плоскость $x = L$, т.к. диполь рассеивает волну во всех направлениях. Поэтому результат (22) [1] является ошибочным.

Критическая ошибка [1] заключается в том, что не был учтен поток момента импульса через границы зарядов. Кроме того, как утверждается в §7, диполь приобретает (теряет) свой момент за счет излучения (поглощения) волны, а это полностью неверно. Дело в том, что момент излученной волны пренебрежимо мал сравнительно с угловым моментом диполя. Это легко проверить численными оценками.

Используем формулу из № 75 [3], которая описывает реакцию излучения:

$$\dot{M} = \frac{2}{3c^3}[\mathbf{d}, \dddot{\mathbf{d}}] \ .$$

В левой части стоит момент реактивной силы, который требуется сравнить с моментом силы, действующей на заряд со стороны волны $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(ikx - i\omega t)$. Последний равен $[\mathbf{d}, \mathbf{E}]$ и в среднем имеет порядок величины $m\omega^2 r^2$, где m — масса электрона и $\mathbf{d} = \mathbf{r}e$. Отношение этих двух моментов имеет порядок

$$\frac{2\omega e^2}{3mc^3} = \frac{4\pi e^2}{3mc^2\lambda} \; .$$

Это отношение $\sim 10^{-8}$ при $\lambda \sim 500$ нм и $\sim 10^{-5}$ при $\lambda \sim 1$ нм соответственно. Как видно, для эллиптически поляризованной волны в диапазоне от СВЧ до рентгеновского момент поля, излучаемого электроном, пренебрежимо мал по сравнению с угловым моментом, который электрон приобретает под действие данной волны. Эти моменты могли бы стать сравнимыми только для γ - излучения, но тогда классическая модель неприменима.

Таким образом, предложенное в [1] объяснение эффекта передачи момента импульса зарядам, которые вращаются в эллиптически поляризованной волне с вектором $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_x$, является ошибочным. Волна все же передает им свой момент! Можно сказать, что этот угловой момент втекает в область волны через плоскости $x = \pm L$ при $L \to +\infty$ и вытекает из нее через границы бесконечно малых окрестностей зарядов. Обсуждаемый вопрос может показаться схоластичным, но автор [1] извлек отсюда важные, хотя и по большей части ложные последствия.

В §8 утверждается, что в случае падения лазерного луча на пластинку, площадь которой больше его сечения: «... в узком крае пучка волна не является плоской, и вектор Пойнтинга $\mathbf{S}$ не обязательно параллелен оси пучка. Именно в этой зоне плотность потока g_{xx} отлична от нуля (что не противоречит (12)), и ее интегрирование приводит к конечной величине G_{xx}.»

Однако, автор не привел расчетов или формул, которые бы подтверждали этот тезис. Как было показано выше, момент импульса перетекает из волны в свободные заряды. Так возникает угловой момент пластинки. Очевидно, что это происходит во всем сечении луча, а не только на краю. Разумеется, ничего нового для физики здесь нет. То, что написано по этому поводу в [1], по-просту неверно.

Снова заявлено о применении метода стационарной фазы, но не предъявлен исходный интеграл. Выписаны только результирующие формулы (26), (27) [1]. Поэтому в §8 нет никакой возможности проверить выкладки. Предположительно, de'facto автор взял за основу формулы для потоков энергии и уравнение (28) [1], придя от них к желаемым выражениям потока момента импульса.

В случае, когда размер пластинки мал по сравнению с поперечником луча утверждается, что поток момента сосредоточен в дифракционной зоне (II и IV на рис. 1). Обоснование снова не приводится, а утверждение неверно. Соответственно, ошибочным является умозаключение в конце §8: «оказывается невозможным естественное определение плотности потока момента электромагнитного поля как момента импульса, приобретаемого единичной площадкой при полном поглощении падающих на нее волн». Дифракция на краях пластинки никак не препятствует этому определению, поскольку момент дифрагировавшей волны пренебрежимо мал (см. выше).

В [1] утверждается, что передача вращательного момента от плоской волны плазме является «поверхностным эффектом», который обусловлен взаимодействием с плазмой на краю заполняемой ею области. В §9 сказано: «передача момента связана с силами, действующими только на градиентах плотности плазмы (на краю)». Это неверно, т.к., в силу сказанного выше, передача углового момента от поляризованной волны в плазму происходит во всем сечении волны.

Таким образом, из отрицания факта передачи момента импульса от эллиптически поляризованной волны заряду автор извлек фундаментальные, но ложные, теоретические положения. Они не выделены в строгие утверждения, но таков стиль статьи [1] («поток сознания»). Центральное из них можно найти в §1: «нельзя утверждать, что передаваемый телу момент импульса локализован в падающей на тело плоской волне». Разумеется в плоской, эллиптически поляризованной волне присутствует угловой момент. Пока волна находися в «стационарном состоянии» (которое отвечает стационарному состоянию фотона) потоки момента импульса отсутствуют. Как только на ее пути встречаются заряды, эти потоки сразу появляются. Однако вопреки тому, что утверждается в [1], они не связаны с дифракцией.

В заключение стоит коснуться известного уравнения (2) [1], связывающего потоки момента импульса и энергии. В плоской монохроматической волне оно действительно неприменимо. Но при расчетах ее взаимодействия с зарядами формула (2) [1] применима, как обычно. Ситуация, когда ее использовать нельзя, является умозрительной и не представляет интереса.

Список литературы

[1] И.В. Соколов, Момент импульса электромагнитной волны, эффект Садовского и генерация магнитных полей в плазме // УМФ, том 161, № 10 (1991), стр. 175 – 190, http://ufn.ru/ru/articles/1991/10/g/

[2] М.В. Федорюк, *Метод перевала*, М.: Наука, 1977

[3] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теория поля*, М.: Физматгиз, 1960