Метрика ускоренной системы и решения уравнения Эйнштейна

Морозов В. Б.

Получена метрика однородно ускоренной системы и эквивалентная ей метрика однородного стационарного гравитационного поля. Получено точное решение гравитационного уравнения Эйнштейна для сосредоточенной массы как задачи Коши с асимптотически однородными граничными условиями. Тензор энергии импульса этой метрики ненулевой и подобен тензору энергии импульса однородного электрического поля, взятому с обратным знаком. Решение Шварцшильда рассматривается как приближение этого решения.

Ключевые слова: уравнение Эйнштейна, тензор энергии-импульса поля, однородная неинерциальная система отсчета, строгие решения уравнения Эйнштейна.

Введение

Уравнение гравитации Эйнштейна правильно описывает известные эмпирические данные. Однако в самом начале возникли трудности с введением в теорию тензора энергии-импульса. Поиск подходящего решения этой проблемы не был простым. В конечном счете, компромиссное решение было найдено. Существенно, что энергия гравитационного поля, взаимодействующего с системой масс и полей материи, вводится для случая, если пространство-время асимптотически плоское [1, 2]. Если пространственный интервал задан $\sigma^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$, метрика g_{ik} совпадает асимптотически с метрикой η_{ik} пространства Минковского на пространственной бесконечности $\sigma \to \infty$, т.е.

$$g_{ik} = \eta_{ik} + O\left(\frac{1}{\sigma}\right), \qquad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right), \qquad \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^l \partial x^m} = O\left(\frac{1}{\sigma^3}\right).$$

Плотность энергии гравитационного поля при таком подходе не локализуема. В этом случае плоская метрика описывает нулевое поле тяготения и приходится использовать дополнительные предположения, вводить «ньютоновский хвост» для получения физически значимого результата, т.е. граничные условия выходят за рамки геометрической теории.

Эти трудности носят принципиальный характер. Является ли известный подход единственно возможным? Если существует другой подход, приведет ли он к другим решениям?

Обычно предполагается, что предельные условия (начальные или граничные) существенно не сказываются на результатах решения конкретных задач, в том числе задач гравитации. Однако это совсем не так. Малые изменения предельных (начальных или граничных) условий могут приводить к качественным изменениям решений дифференциальных уравнений в частных производных (задача Коши). Известный пример Адамара [3] яркое тому подтверждение.

Классическая теория близкодействия предполагает наличие в среде и/или пространстве напряжений. Достаточно определенно эту мысль выразил А. Зоммерфельд [4] «*A field concept cannot be satisfied herewith, however, but must follow up the transfer of force actions in vacuum, where there are no charges. This was Faraday's intimation when he spoke of lines of force as of elastic bands which transmit tension and compression. Maxwell was also here able to place Faraday's notions into clear mathematical focus. This was the origin of Maxwell's* ***stress tensor****, which may be expanded relativistically into a* ***stress-energy tensor***». Я не знаю причин, по которым тоже самое нельзя сделать в геометрической теории гравитации.

В эйнштейновской теории гравитации движение тел определяется геометрией пространства-времени, а именно, метрическим тензором g_{ij}. Мы видим что, при чисто геометрическом подходе к уравнениям движения нет необходимости вводить в теорию натяжения, аналогично натяжениям в электромагнитной теории или в механике сплошных сред. Эта особенность общей такого подхода к теории относительности была отмечена в работе [5]: «*Гравитационные поля* ***можно*** *задавать, не вводя напряжений и плотности энергии*» (выделено мной, ВМ). С другой стороны, А. Эйнштейн в той же работе [5] привел простой пример, в котором натяжения в вакууме не только могут, но и должны быть ненулевыми. В этом примере он рассмотрел два неподвижных гравитирующих тела, связанных жестким стержнем, препятствующим сближению этих тел. Эйнштейн показал, что натяжения стержня должны уравновешиваться вакуумными натяжениями гравитационного поля. «Далее следует указать на то, что напряжения t_σ^α тех гравитационных полей, через которые осуществляется взаимодействие многих тел, никоим образом не могут обращаться в нуль». Однако в окончательном варианте теории гравитации был использован простейший из возможных вариантов. На самом деле тензор энергии-импульса поля в общем случае должен быть ненулевым, т.е. по крайне мере не нулевым является тензор натяжений, входящий в тензор энергии-импульса.

А. Эйнштейн в [6] выдвинул принцип эквивалентности как метод исследования релятивистской теории гравитации. Первым шагом в этом направлении было исследование *равномерно и однородно укоренной релятивистской системы отсчет*[1], которая должна быть, согласно принципу эквивалентности, эквивалентна стационарному однородному гравитационному полю. Метрики однородных систем отсчета должны быть форминвариантны по отношению к сдвигу. Однородность поля на бесконечности как граничное условие выглядит привлекательно. Кроме того необходимо учитывать изотропность пространства. Однако для реализации этих принципов необходимо знать точное значение метрики, описывающей однородное поле.

[1] Однородно ускоренной системой отсчета мы называем такую систему все точки, которой имеют одинаковое и постоянное собственное ускорение.

Метрика неинерциальных релятивистских систем отсчёта

Тщательное и наиболее полное исследование неинерциальных систем отсчета выполнил К. Меллер (C.Møller) [7]. Между тем совсем не обязательно искать неинерциальную систему как функцию координат. Можно найти метрику непосредственно. Ограничимся одномерным движением на плоскости Минковского S'. Метрика такой плоскости

$$ds'^2 = c^2dt'^2 - dx'^2.$$

С помощью преобразования Лоренца получим метрику другой инерциальной системы отсчета S

$$ds^2 = \zeta c^2dt^2 - \zeta^{-1}dx^2. \qquad (1)$$

Параметр ζ – масштабный коэффициент (квадрат Лоренц фактора), функция скорости систем S' и S относительно первоначальной системы.

Перейдем к неинерциальной системе отсчета. Ограничимся «правильными» системами S, а именно, такими в которых достаточно малую окрестность точки можно считать однородной псевдоевклидовой (локально инерционными системами координат). При этом условии такие системы при произвольных значениях $\zeta = \zeta(t,x)$ будут иметь метрику вида (1). В частности, стационарная система отсчета имеет метрику

$$ds^2 = \zeta(x)c^2dt^2 - \zeta(x)^{-1}dx^2.$$

Будем считать малую область трехмерного пространства изотропной. Тогда этот результат можно распространить на четыре измерения

$$ds^2 = \zeta(x)c^2dt^2 - \zeta(x)^{-1}(dx^2 + dy^2 + dz^2). \qquad (2)$$

В простейшем случае $\zeta(x)$ – линейная функция $\zeta_1(x)$. Тогда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right)c^2dt^2 - \left(1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right)^{-1}(dx^2 + dy^2 + dz^2), \qquad (3)$$

причем $\varphi = -\alpha x$ потенциал поля ускорения, где α – ускорение . Эта метрика является локально точной (в пределе $x \to 0$). В том же переделе она совпадает с первым приближением решения гравитационного уравнения Эйнштейна [8]. Таким образом, в рамках общей теории относительности доказана локальная эквивалентность однородного гравитационного поля и однородно ускоренной системы. В работах [9, 10] аналогичный результат получен другим путем.

Время в однородно ускоренных системах и однородных гравитационных полях

Выберем в ускоренной системе отсчета S две точки A_0 и A_1 с координатами $x_0 = 0$ и $x_1 = l > 0$. Пусть S' инерциальная система отсчета, сопутствующая точке A_0. Сравнение частот «маятников» стандартных часов, помещенных в точку A_0, даст одинаковый результат – ν_0 в обеих системах отсчета. С другой стороны, согласно [6] наблюдатель в точке A_0 увидит, что частота идентичных ν_1 часов в точке A_1 изменится

$$\nu_1 = \nu_0(1 + \alpha\, l/c^2) = \nu_0(1 - \varphi/c^2). \tag{4}$$

Эйнштейн [11] привел чрезвычайно простое доказательство этого соотношения, имеющего универсальный характер, поскольку при его доказательстве не используются ничего кроме принципа относительности и эффекта Доплера. Поэтому в общей теории относительности этот результат остался без изменений [12] и нашел подтверждение в экспериментах для гравитационного поля [13].

Однако соотношение (4) не является точным ни для полей инерции, ни для гравитационного поля. Точным соотношение (4) является только в пределе малых $\alpha\, l/c^2$. Однако можно получить точное выражение и для конечных интервалов. Разобьём интервал l на N отрезков. Тогда после N последовательных преобразований (4) получим в пределе точное выражение

$$\nu_1 = \nu_0 \lim_{N\to\infty}\left(1 + \frac{\alpha l}{c^2 N}\right)^N = \nu_0 e^{\frac{\alpha l}{c^2}} \tag{5}$$

Следовательно, точное значение[2] для интервалов собственного времени

---

[2] Тот же результат можно получить из ковариантного уравнения движения в псевдоримановом пространстве $\frac{d^2x_1}{ds^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1}\frac{dx^0}{ds}\frac{dx^0}{ds} = 0$ (§ 87 [12]) при условии $\frac{d^2x_1}{ds^2} = \frac{\alpha}{c^2}$, что лишний раз подчеркивает общность результата.

$$d\tau = d\tau' e^{\frac{\alpha x}{c^2}}. \qquad (6)$$

Эйнштейн в 1907 году [6], подчеркивая приближенный характер выражения (5), предложил именно такое выражение для конечных x из соображений однородности пространства, буквально: «выбор начала координат не должен влиять на это соотношение». Удивительно, но этот результат даже не упоминался длительное время.

Асимптотически неплоские метрики.

Значение масштабного коэффициента (6) в метрике (2) позволяет точное выражение для интервала однородно ускоренной системы отсчета

$$ds^2 = e^{\frac{2\alpha x}{c^2}} c^2 dt^2 - e^{-\frac{2\alpha x}{c^2}} d\sigma^2. \qquad (7)$$

Система однородна (форминвариантна). Пространственный сдвиг начала координат на некоторую фиксированную величину эквивалентен смещению точки касания с псевдоевклидовым пространством, метрика которого $ds^2 = c^2 dt^2 - d\sigma^2$. Другими словами мы просто переместили наблюдателя в другую точку.

Тот же прием, который привел нас предельному переходу (5) можно применить к локально точному решению уравнению Эйнштейна для однородного поля [8]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Предельный переход

$$ds^2 = \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{2\varphi}{c^2 N}\right)^N c^2 dt^2 - \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2 N}\right)^N (dx^2 + dy^2 + dz^2), \qquad (8)$$

в конечно счете, приводит к той же метрике (7). Таким образом, принцип эквивалентности для однородных полей гравитации и инерции выполняется точно.

Метрика (7) описывает псевдориманово пространство. Тензор Эйнштейна этой метрики ненулевой и имеет диагональный вид

$$\begin{pmatrix} -\exp\frac{4\alpha x^1}{c^2}P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix},$$

где $P = \frac{\alpha^2}{c^4}$. Уравнение гравитационное Эйнштейна для однородного поля ускоренной системы в вакууме принимает вид:

$$G_{ik} = \frac{8\pi\, G}{c^4} t_{ik}, \tag{9}$$

где G – гравитационная постоянная. Именно такой вид уравнения соответствует принципам общей теории относительности. В соответствии с этими принципами поле (искажение пространства Минковского) вызвано не только массивными телами, но и полями, в том числе и полем тяготения. Уравнение для вакуума $G_{ik} = 0$ было предложено, как приближение уравнения Эйнштейна и должно рассматриваться как таковое в дальнейшем.

Теперь тензор энергии-импульса однородного поля ускорений или гравитационного поля

$$t_{ik} = \begin{pmatrix} -\exp\frac{4\alpha x^1}{c^2}\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где $\omega = \frac{\alpha^2}{8\pi\, G}$. Значение и знак величины ω совпадает с величиной натяжения гравитационного поля с напряженностью α, полученной в задаче о притяжении двух бесконечных гравитирующих пластин в ньютоновском пределе. В том же пределе плотность энергии гравитационного поля $-\frac{\alpha^2}{8\pi\, G}$ (см. задача 1 § 106 [12]).

Тензор t_{ik} в начале координат подобен тензору энергии-импульса однородного электрического поля. Знак натяжений, входящих в тензор t_{ik}, обратен знаку натяжений тензора энергии-импульса электромагнитного поля. Это становится понятным после сравнения сил действующих на заряженную сферическую оболочку и сил действующих на такую же тяжелую оболочку. В обоих случаях поле находится вне оболочки, но в первом случае поле растягивает оболочку, в другом – сжимает.

Метрика поля сосредоточенной массы

В общем случае уравнение Эйнштейна необходимо записать в виде

$$G_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4}(T_{ik} + t_{ik}), \tag{11}$$

где T_{ik} – тензор энергии импульса гравитирующих тел.

В стандартном решении Шварцшильда стационарной задачи гравитационного поля сосредоточенной массы (§ 100 [12]) используется асимптотическое значение $g_{00} = 1 + 2\varphi/c^2$, где $\varphi = GM/r$. Замена этого значения на точное $g_{00} = \exp 2\varphi/c^2$ приводит к метрике

$$ds^2 = e^{-\frac{r_g}{r}}c^2dt^2 - r^2(\sin^2\theta\, d\varphi^2 - d\theta^2) - e^{\frac{r_g}{r}}dr^2 \tag{12}$$

здесь t, r, θ, φ – сферические координаты, параметр $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ – радиус Шварцшильда. Уравнение для пустого пространства $G_{ik} = 0$ теперь не выполняется. Однако для получения метрики (12) теперь нет нужды в каком либо уравнении, а из уравнения (11) можно найти тензор энергии-импульса гравитационного поля.

Локально изотропное решение уравнения Эйнштейна для сосредоточенной массы на бесконечности должно иметь ньютонов потенциал $\varphi = \frac{GM}{r}$. Тогда из метрики (7) следует метрика сферически симметричной задачи

$$ds^2 = e^{-\frac{r_g}{r}}c^2dt^2 - e^{\frac{r_g}{r}}d\sigma^2 \tag{13}$$

где. Эта метрика удовлетворяет уравнению Эйнштейна (12).

Заметим, что полученные точные метрики имеют локально однородное поле ускорений или силы тяжести. Поэтому было бы разумно дополнить принцип локальной однородности обычного пространства локальным принципом однородности поля.

Метрика Шварцшильда в изотропных координатах [12]

$$ds^2 = \left(\frac{1 - \frac{r_g}{4r}}{1 + \frac{r_g}{4r}} \right)^2 c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{4r}\right)^4 d\sigma^2$$

должна рассматриваться как одно из возможных приближений метрики (13). Обратно, из этой формы метрики можно получить метрику (13) другим способом, используя предельный переход аналогичный переходу (8).

В области пространства, занятой веществом энергией гравитационного поля можно пренебречь. Полученное решение обычного уравнения Эйнштейна сшивается с метрикой (12).

Для метрики (13) из уравнения движения $\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0$ находится ускорение силы тяжести в стационарном сферически симметричном случае

$$\alpha = \frac{GM}{r^2} e^{\frac{GM}{r}}. \tag{14}$$

Для сравнения напряженность, полученная из решения Шварцшильда

$$\alpha = \frac{GM}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - 2GM/r}}.$$

На рис. графики этих полей сравниваются с ньютоновским законом гравитации, при этом доступные для наблюдений релятивистские эффекты практически не отличаются от эффектов в приближении Шварцшильда.

Заключение

Полученные метрики, включая простейшую метрику (3), принадлежат к псевдоримановым пространствам. Таким образом, неевклидоваость пространства появляется даже в отсутствии гравитации в неинерциальных системах. По собственному опыту знаю, что это чрезвычайно трудно принять. На самом деле это не является чем-то новым, например, Эйнштейн не раз приводил пример такой неинерциальной системы – вращающийся диск [14]. Меллер [7] установил, что эта неинерциальная система отсчета является пространством с отрицательной кривизной.

Важно, что в решениях уравнения Эйнштейна появился тензор энергии-импульса гравитационного поля с понятными и физически осмысленными членами.

Не следует думать, что на протяжении ста лет за исключением работ Меллера не было серьезных попыток осмыслить неинерциальные системы отсчета. Хочется отметить работы В.И. Родичева и его ученика С.А. Подосенова. Родичев [15, 16] разделял преобразования координат и преобразования неинерциальных систем отсчета и получил метрику с ненулевой скалярной кривизной. Подосенов [17] также получил метрику с ненулевой кривизной и предложил в качестве решения сферически симметричной задачи метрику $ds^2 = e^{-\frac{r_g}{r}} c^2 dt^2 - r^2(\sin^2\theta\, d\varphi^2 - d\theta^2) - dr^2$, но она приводит к результатам, существенно отличающимся от предсказаний общей теории относительности. Заслуживает внимания точка зрения В.А. Фока, исследовавшего метрику гравитационного поля, подобную метрике (7), и получившего при этом интересные результаты (§56 [8]).

Жаркие споры с С.А. Подосеновым и Дж. Фоукзоном (J. Foukzon) инициировали мой интерес к проблеме однородно ускоренной системы и, в конечном счете, привели к вышеизложенным результатам. Я также благодарен М.Б. Белоненко, Ю.Н. Ерошенко, Д.Б. Зотьеву, М.Г. Иванову и В.А. Рубакову за замечания и советы, которые повлияли не изложение материала.

Литература

1. Новиков С П, Тайманов И А *Современные геометрические структуры и поля* МЦНМО, (2005).

2. Faddeev L D, *The energy problem in Einstein's theory of gravitation (Dedicated to the memory of V.A. Fock) Sov. Phys. Usp.* **25** 130–142 (1982).
3. Соболев С Л, *Уравнения математической физики* М.: Наука, (1966) § 2.
4. Sommerfeld A *Electrodynamics* Academic Press, (1952) § 31.
5. Einstein A *Notiz zu E. Schrödingers Arbeit «Die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes»*. Phys. Z., 19, 115-116, (1918).
6. Einstein A. *Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen.* Jahrb. d. Radioaktivitat u. Elektronik, 4, 411—462 (1907).
7. Møller C. *Theory of Relativity* Oxford University Press; 2nd edition, (1972)
8. Fock, V. A. "The Theory of Space, Time and Gravitation". Macmillan. (1964).
9. Morozov V B Whether or not a Body Form Depends on Acceleration? http://arxiv.org/pdf/1305.5412v2.
10. Morozov V. B. A note on the equivalence principle applicability to the general theory of relativity http://arxiv.org/pdf/1404.3083v1.
11. Einstein A *Uber den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes*. Ann. Phys., 35, 898—908. (1911).
12. Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* Vol. 2 (4th ed.). Butterworth–Heinemann (1975).
13. Will C M *The Confrontation between General Relativity and Experiment.* http://arxiv.org/abs/1403.7377.
14. Einstein A *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie (Gemeinverständlich).* Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1920.
15. Родичев В И *Геометрические свойства систем отсчета.* (в кн. Эйнштейновский сборник, 1971).
16. Родичев В И *Эволюция понятия системы отсчета и программа Эйнштейна.* (в кн. Эйнштейновский сборник, 1974).

17. Подосёнов С.А. *Геометрические свойства неинерциальных систем отсчета в релятивистской механике* (в кн. Дискуссионные вопросы теории относительности и гравитации. М.: Наука, 1982, с. 95 – 103).

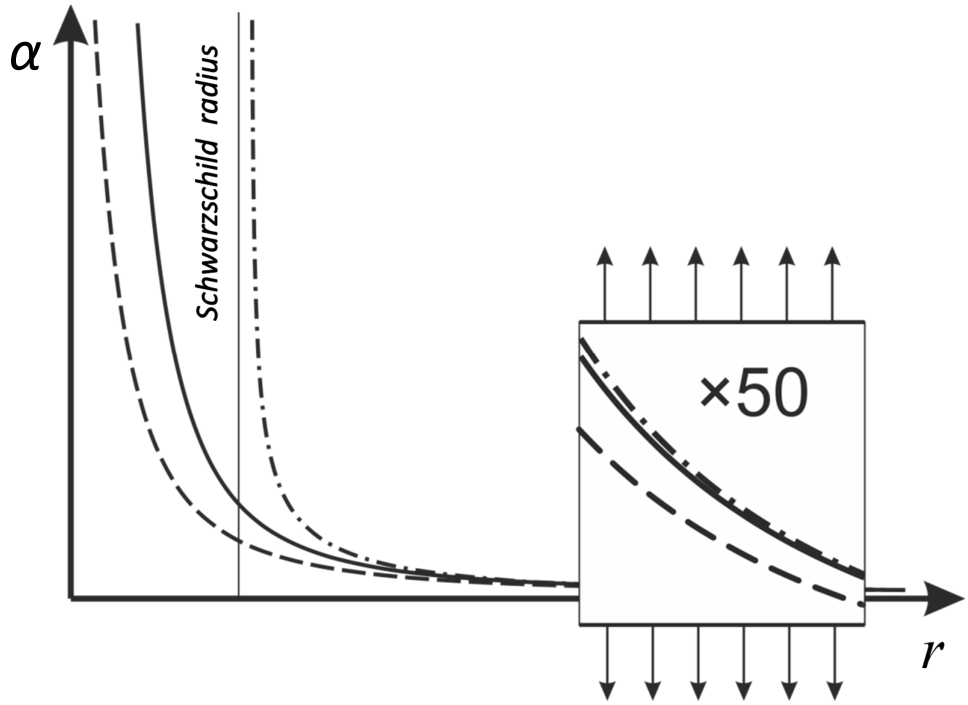

Рис. Зависимость силы тяжести от расстояния до точечной массы: закон Ньютона – штриховая линия; решения Шварцшильда – штрихпунктирная линия; точное решение – сплошная линия. В прямоугольнике растянутый в пятьдесят раз участок графика.